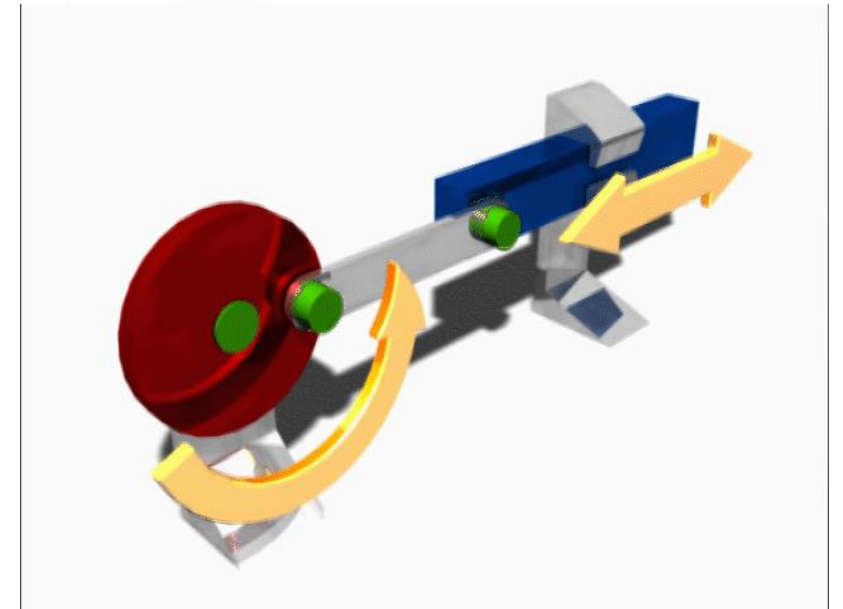
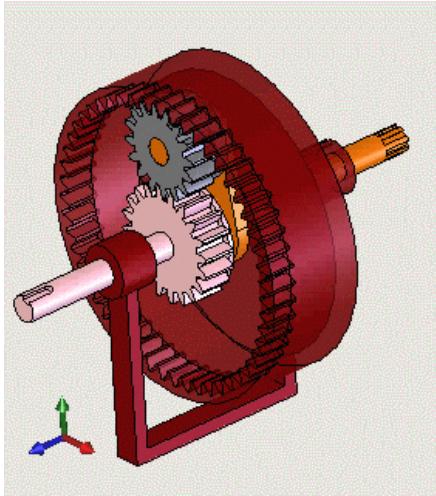


# Liaisons et lois entrée sortie des systèmes

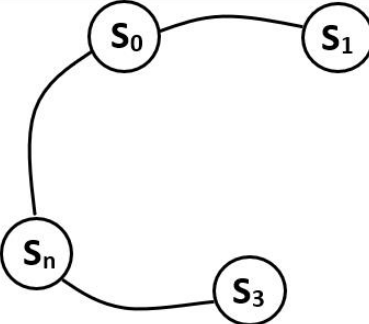
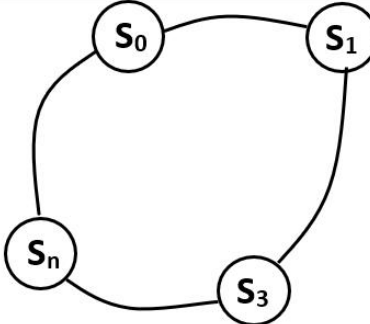
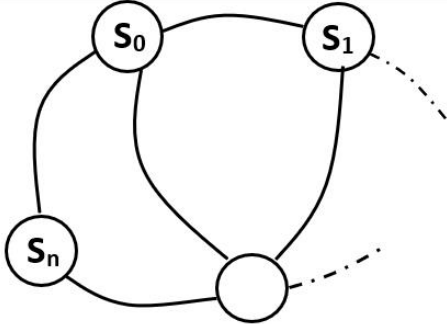

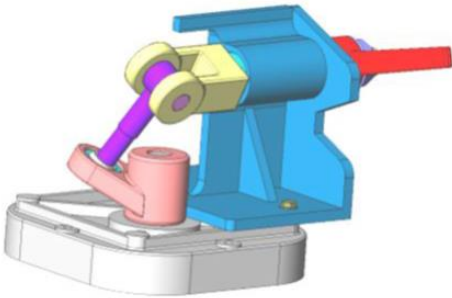



# Liaisons et lois entrée sortie des systèmes

## Compétences attendues :

- ✓ Proposer une démarche permettant d'obtenir une loi entrée-sortie géométrique.  $\Leftrightarrow I$
- ✓ Simplifier un modèle de mécanisme.
- ✓ Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques.  $\Leftrightarrow I$
- ✓ Résoudre numériquement une équation ou un système d'équations.  $\Leftrightarrow I$

# Chaîne ouverte, chaîne fermée

Chaîne ouverte	Chaîne fermée	Chaîne complexe
		
		
<p>Une chaîne de solides ouverte est une chaîne où les <b>solides extrêmes</b> sont <b>différents</b>.</p>	<p>Une chaîne de solides fermée est une chaîne où les deux <b>solides extrêmes</b> sont <b>reliés par une liaison</b>. On a alors un cycle.</p>	<p>Une chaîne complexe est composée de plusieurs chaînes ouvertes et fermées <b>imbriquées</b>.</p>

# Chaîne ouverte, chaîne fermée

Définition : On appelle **loi d'entrée sortie** d'un système mécanique, l'ensemble des relations entre les paramètres de position de la pièce d'entrée (en général imposé par un actionneur) et ceux de la pièce de sortie.

***RELATION DE CHASLES***

# Chaîne ouverte, chaîne fermée

Chaines cinématiques fermées :

- Fermeture géométrique ou fermeture angulaire
- Fermeture cinématique
- Produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante
- Mise en équation à partir de la condition de non glissement...

# Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Mécanisme  $\rightarrow$  les paramètres cinématiques sont tous indépendants  $\rightarrow$  pilotage de chaque paramètre cinématique

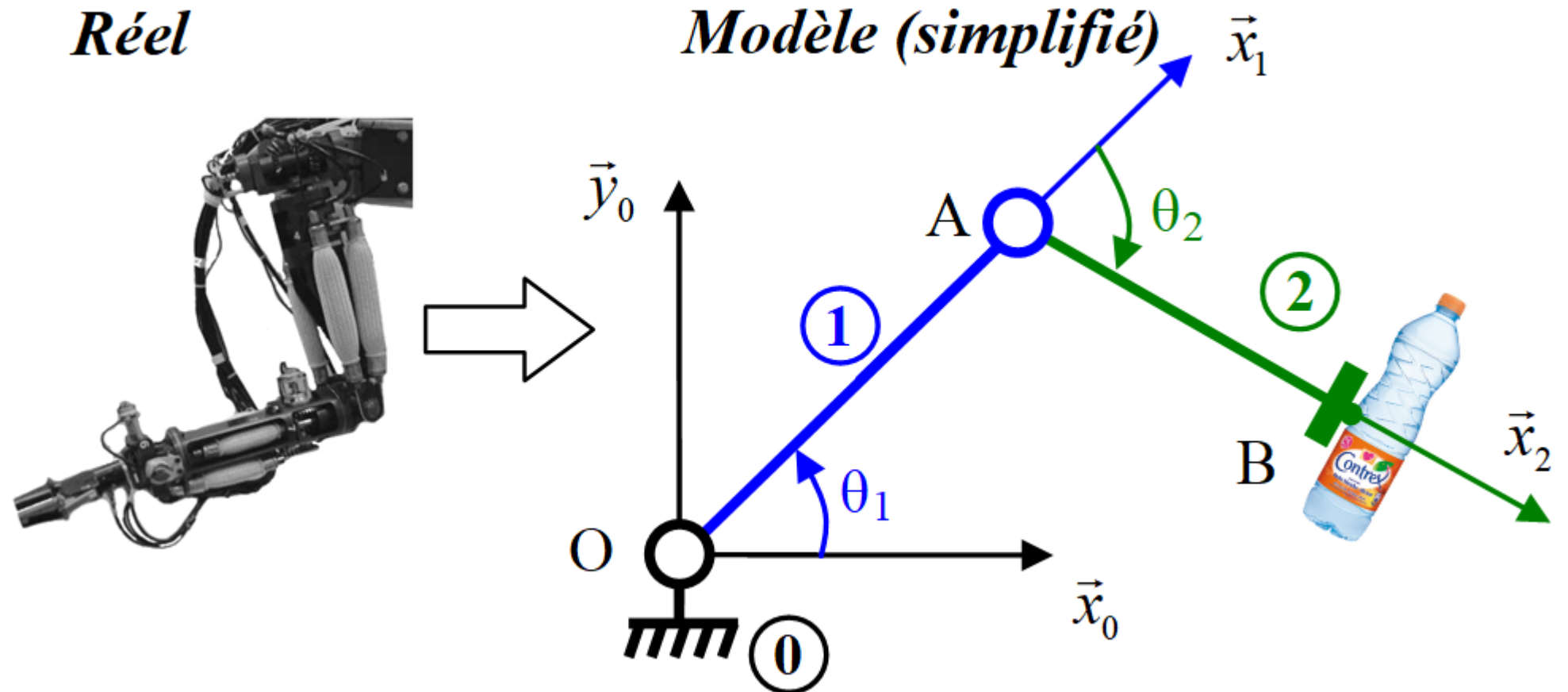
Mécanisme  $\rightarrow$  composé  $\rightarrow$  liaisons à un degré de liberté (pivots et/ou glissières)

Loi E/S  $\rightarrow$  relation entre les coordonnées articulaires et les coordonnées opérationnelles

Loi E/S = **modèle géométrique**

# Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Exemple du bras de robot :









# Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

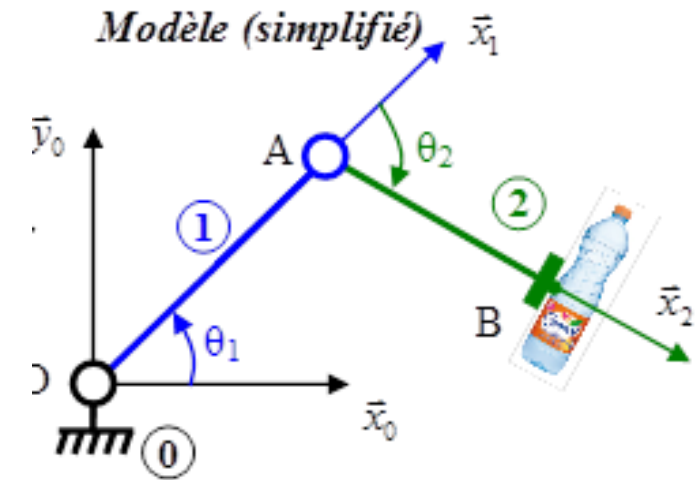
## Exemple du bras de robot :

Robot  $\rightarrow$  2 mouvements de rotation de paramètres  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

B = pince en bout de chaîne :  $(x_B ; y_B)$  dans  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ .

Position angulaire de la pièce 2 par rapport à la pièce 0 :

$$(\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) + (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \theta_1 + \theta_2$$



# Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Calcul du modèle géométrique direct

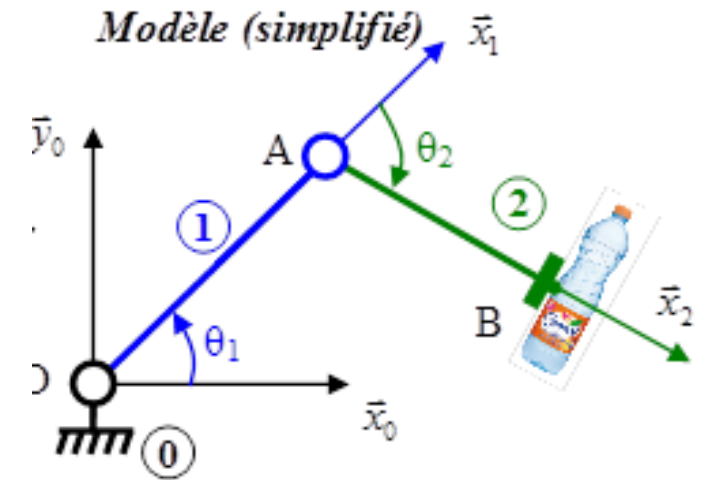
$$\overrightarrow{OB} \rightarrow \text{Relation de Chasles : } \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{OB} = L \cdot \overrightarrow{x}_1 + L \cdot \overrightarrow{x}_2$$

Projection dans la base  $\rightarrow$  exprimer  $x_B$  et  $y_B$  :

$$\rightarrow \overrightarrow{OB} = L \cdot \overrightarrow{x}_1 + L \cdot \overrightarrow{x}_2$$

$$\text{avec } \overrightarrow{x}_1 = \cos\theta_1 \cdot \overrightarrow{x}_0 + \sin\theta_1 \cdot \overrightarrow{y}_0 \text{ et } \overrightarrow{x}_2 = \cos(\theta_1 + \theta_2) \cdot \overrightarrow{x}_0 + \sin(\theta_1 + \theta_2) \cdot \overrightarrow{y}_0$$

$$\rightarrow \overrightarrow{OB} = (L \cdot \cos\theta_1 + L \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2)) \cdot \overrightarrow{x}_0 + (L \cdot \sin\theta_1 + L \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)) \cdot \overrightarrow{y}_0$$

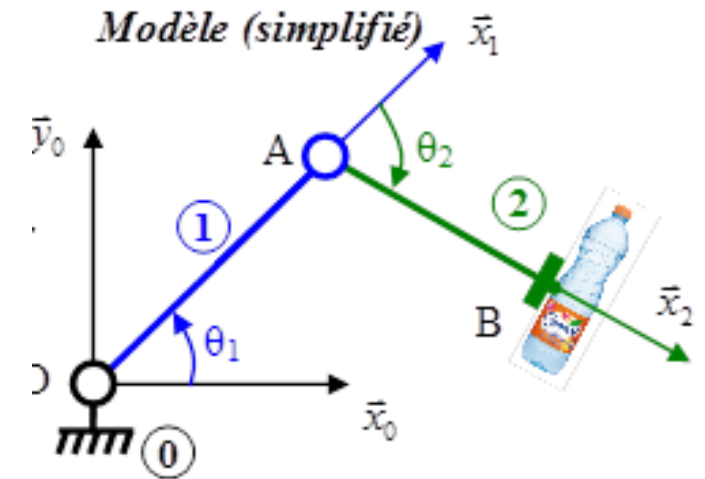


# Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Calcul du modèle géométrique direct

Modèle géométrique direct :

$$\begin{cases} x_B = L \cdot \cos\theta_1 + L \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_B = L \cdot \sin\theta_1 + L \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$



# Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

## Calcul du modèle géométrique indirect

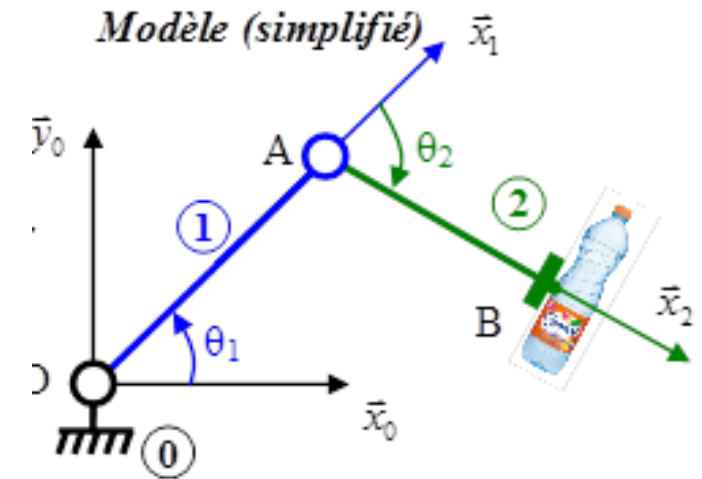
→ Inverser le modèle géométrique direct :

$$\begin{cases} x_B = L \cdot \cos\theta_1 + L \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_B = L \cdot \sin\theta_1 + L \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

→ Transformations trigonométriques de sommes en produits

$$(\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} \text{ et } \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2})$$

$$\begin{cases} x_B = L \cdot \cos\theta_1 + L \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y_B = L \cdot \sin\theta_1 + L \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_B = 2 \cdot L \cdot \cos \frac{2 \cdot \theta_1 + \theta_2}{2} \cdot \cos \frac{\theta_2}{2} \\ y_B = 2 \cdot L \cdot \sin \frac{2 \cdot \theta_1 + \theta_2}{2} \cdot \cos \frac{\theta_2}{2} \end{cases}$$



# Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Calcul du modèle géométrique indirect

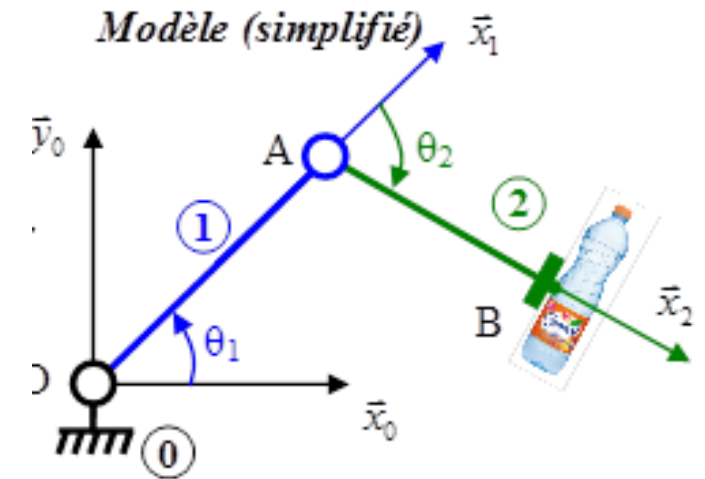
→  $x_B^2 + y_B^2$  (→ Faire apparaitre  $\cos^2 A + \sin^2 A$ ) :

$$x_B^2 + y_B^2 = 4 \cdot L^2 \cdot \cos^2 \frac{\theta_2}{2} \cdot \left( \cos^2 \frac{2 \cdot \theta_1 + \theta_2}{2} + \sin^2 \frac{2 \cdot \theta_1 + \theta_2}{2} \right) = 4 \cdot L^2 \cdot \cos^2 \frac{\theta_2}{2}$$

et avec  $\cos^2 \frac{\theta_2}{2} = \frac{1 + \cos \theta_2}{2}$

$$x_B^2 + y_B^2 = 2 \cdot L^2 \cdot (\cos \theta_2 + 1)$$

→ ce qui permet d'obtenir :  $\cos \theta_2 = \frac{1}{2} \left( \left( \frac{x_B}{L} \right)^2 + \left( \frac{y_B}{L} \right)^2 \right) - 1$



# Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Calcul du modèle géométrique indirect

$$\rightarrow \frac{y_B}{x_B} = \tan \frac{2.\theta_1 + \theta_2}{2}$$

$$\rightarrow \theta_1 = \arctan\left(\frac{y_B}{x_B}\right) - \frac{\theta_2}{2}$$

Modèle géométrique indirect :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_2 = \arccos\left[\frac{1}{2} \left( \left(\frac{x_B}{L}\right)^2 + \left(\frac{y_B}{L}\right)^2 \right) - 1\right] \\ \theta_1 = \arctan\left(\frac{y_B}{x_B}\right) - \frac{\theta_2}{2} \end{array} \right.$$

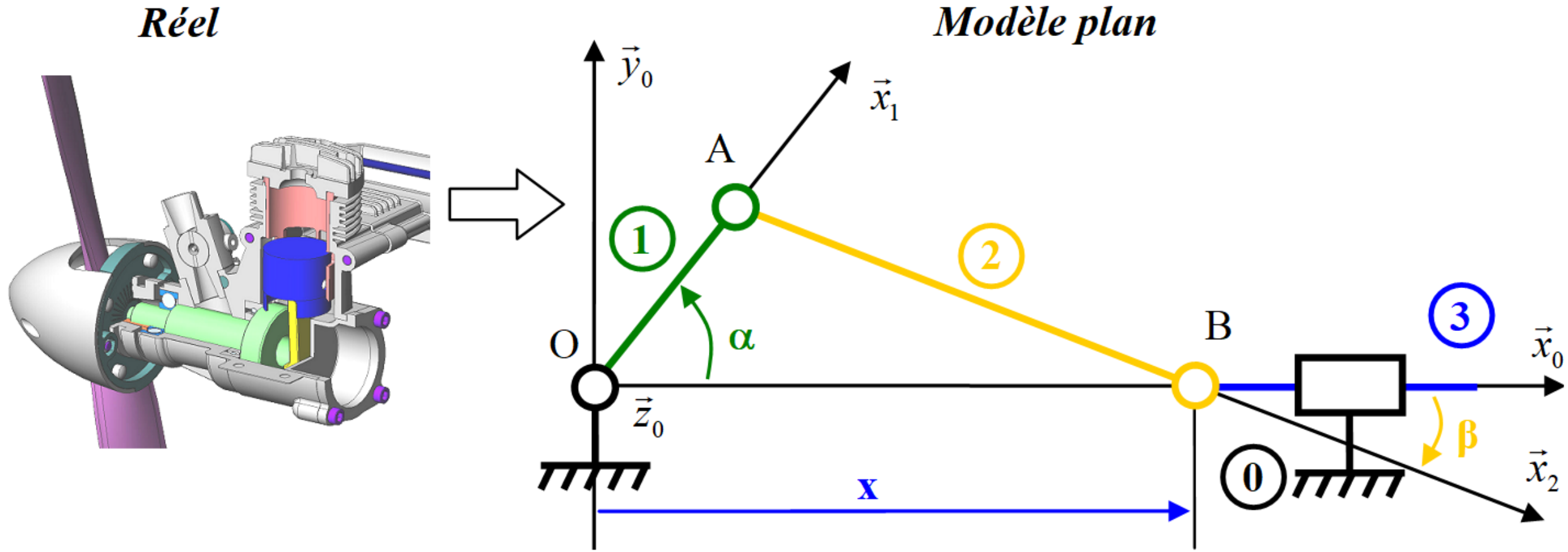
# Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture géométrique

**La loi entrée sortie dans le cas de chaînes fermées se fait souvent (mais pas toujours) à l'aide de la technique dite de fermeture géométrique.**

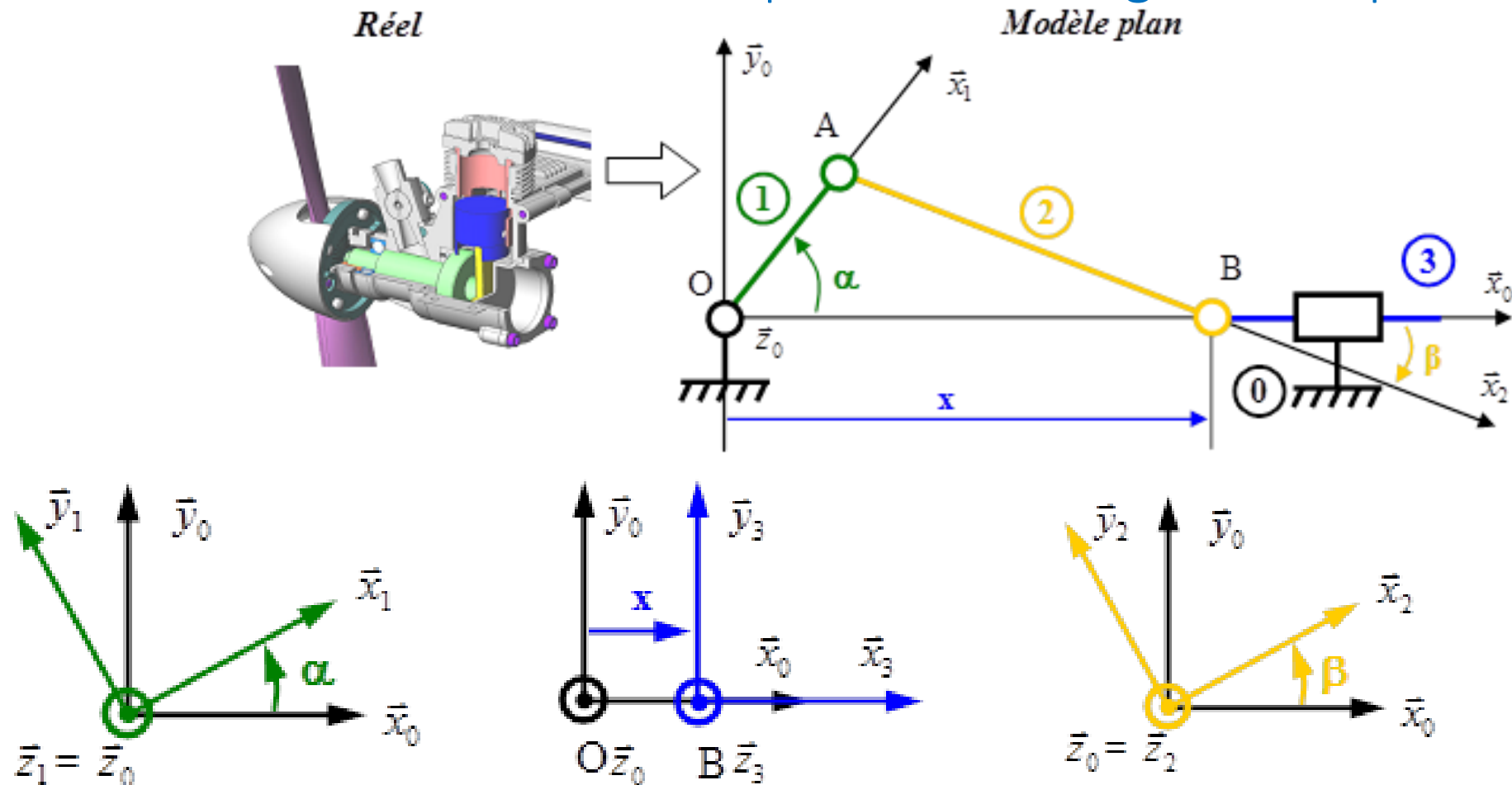


# Chaînes cinématiques fermées



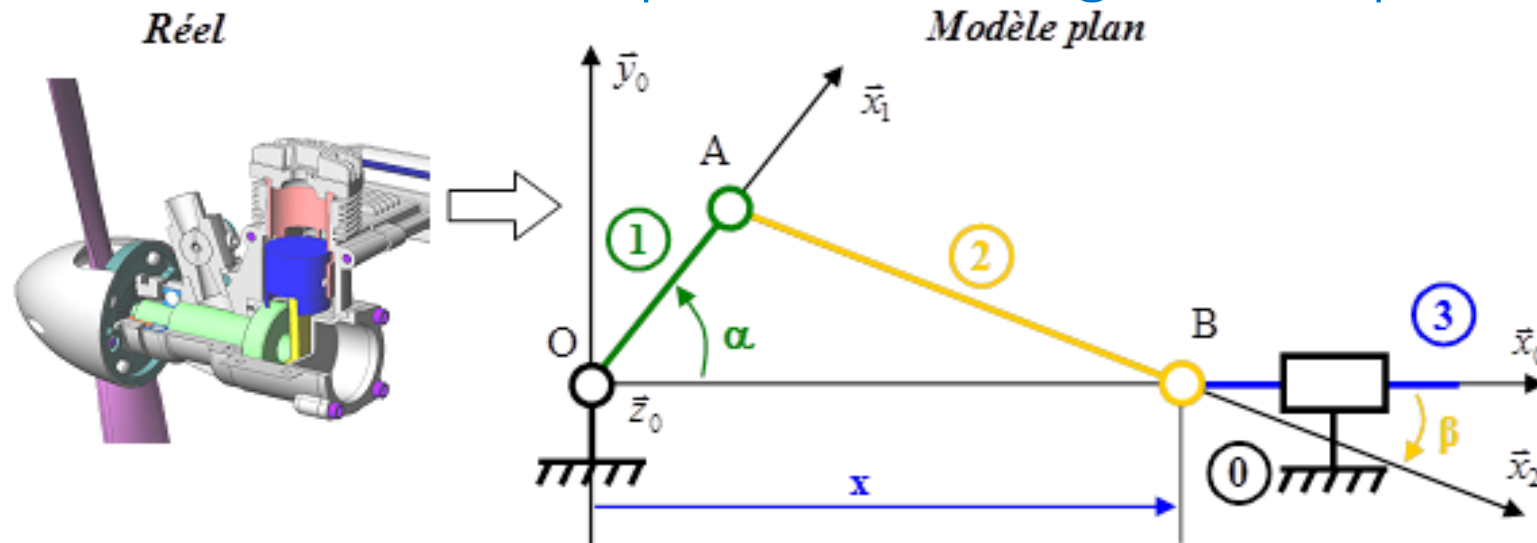
# Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture géométrique



# Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture géométrique



Fermeture géométrique :  $\vec{OO}$  est nul :  $\vec{OO} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{0}$

Soit  $L_1 \cdot \vec{x}_1 + L_2 \cdot \vec{x}_2 - x \cdot \vec{x}_0 = \vec{0}$

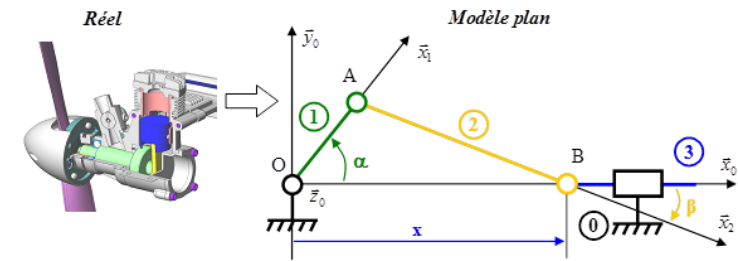
Projection sur les axes  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$  :

$$\begin{cases} L_1 \cdot \cos\alpha + L_2 \cdot \cos\beta - x = 0 \\ L_1 \cdot \sin\alpha + L_2 \cdot \sin\beta = 0 \end{cases}$$

# Chaînes cinématiques fermées

## Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture géométrique

- Combiner en une seule relation
- Faire disparaître le paramètre intermédiaire  $\beta$ .

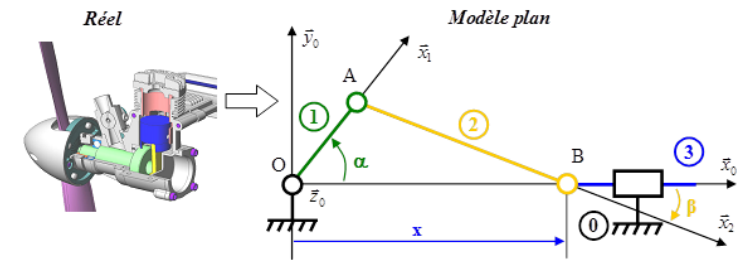


$$\rightarrow \begin{cases} \cos\beta = \frac{x - L_1 \cdot \cos\alpha}{L_2} \\ \sin\beta = \frac{-L_1 \cdot \sin\alpha}{L_2} \end{cases} \quad \text{et } \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$$

$$\rightarrow \left( \frac{x - L_1 \cdot \cos\alpha}{L_2} \right)^2 + \left( \frac{-L_1 \cdot \sin\alpha}{L_2} \right)^2 = 1 \quad \rightarrow (x - L_1 \cdot \cos\alpha)^2 = L_2^2 - (L_1 \cdot \sin\alpha)^2$$

# Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture géométrique



Soit la loi d'entrée sortie :

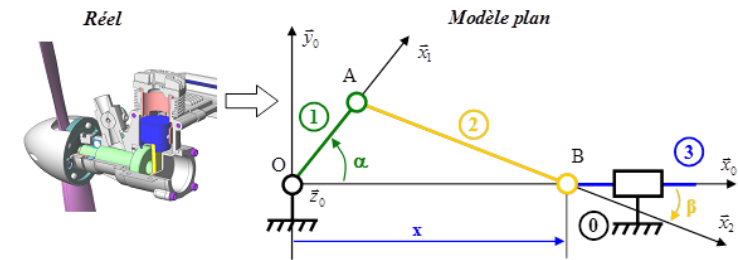
$$x = L_1 \cdot \cos\alpha + \sqrt{L_2^2 - (L_1 \cdot \sin\alpha)^2}$$

Cette relation n'est valable que pour  $L_2 > L_1$ .

# Chaînes cinématiques fermées

## Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture géométrique

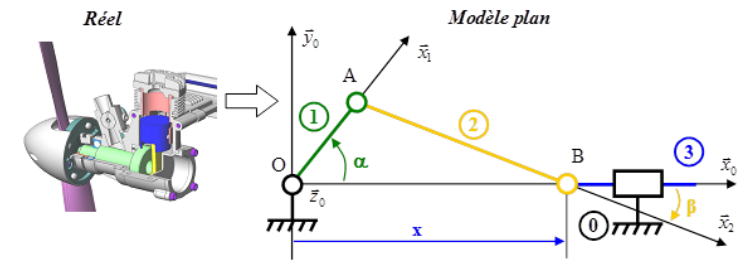
### Techniques de calcul utiles :



- Equations projetées + isolement cosinus et sinus des angles qui ne nous intéressent pas + élévation au carré +  $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$
- Relation entre les angles  $\rightarrow$  rapport des équations ( $\rightarrow$  tangente)

# Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture géométrique



Soit la loi d'entrée sortie :

$$x = L_1 \cdot \cos\alpha + \sqrt{L_2^2 - (L_1 \cdot \sin\alpha)^2}$$

Cette relation n'est valable que pour  $L_2 > L_1$ .



# Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

## Tracé de la loi entrée-sortie

Tracer numériquement l'évolution de  $x$  en fonction de l'angle  $\alpha$ .

→ équation du type  $f(x) = 0$  pour un angle  $\alpha$  fixé

→ Obtenir les  $x$  solutions (pour chaque  $\alpha$  fixé)

→ Tracer la courbe donnant  $x$  en fonction de  $\alpha$

Pour  $\alpha$  fixé :

$$L_1 \cdot \cos\alpha + \sqrt{L_2^2 - (L_1 \cdot \sin\alpha)^2} - x = 0$$

Cette équation est bien de la forme  $f(x) = 0$ .

# Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Tracé de la loi entrée-sortie

Equation de la forme  $f(x) = 0$

- $f$  est continue sur  $[a, b]$
- $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ .

→ **DICHOTOMIE**

→ **METHODE DE NEWTON**

# Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Tracé de la loi entrée-sortie

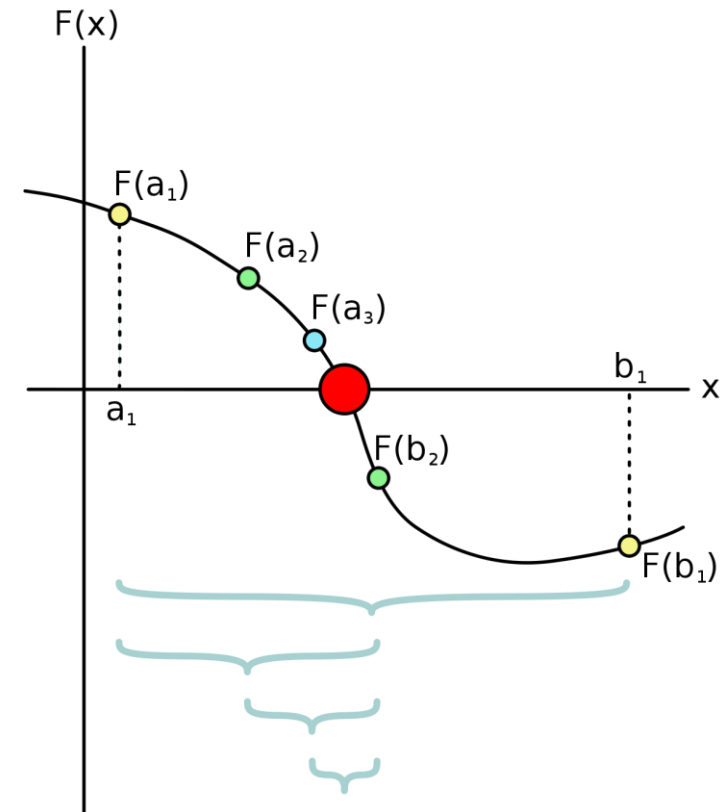
Dichotomie

$$a_0 = a \text{ et } b_0 = b$$

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, c_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Si  $f(c_n)$  a même signe que  $f(a_n) \rightarrow b_{n+1} = c_n$  et  $a_{n+1} = a_n$

Sinon  $\rightarrow a_{n+1} = c_n$  et  $b_{n+1} = b_n$

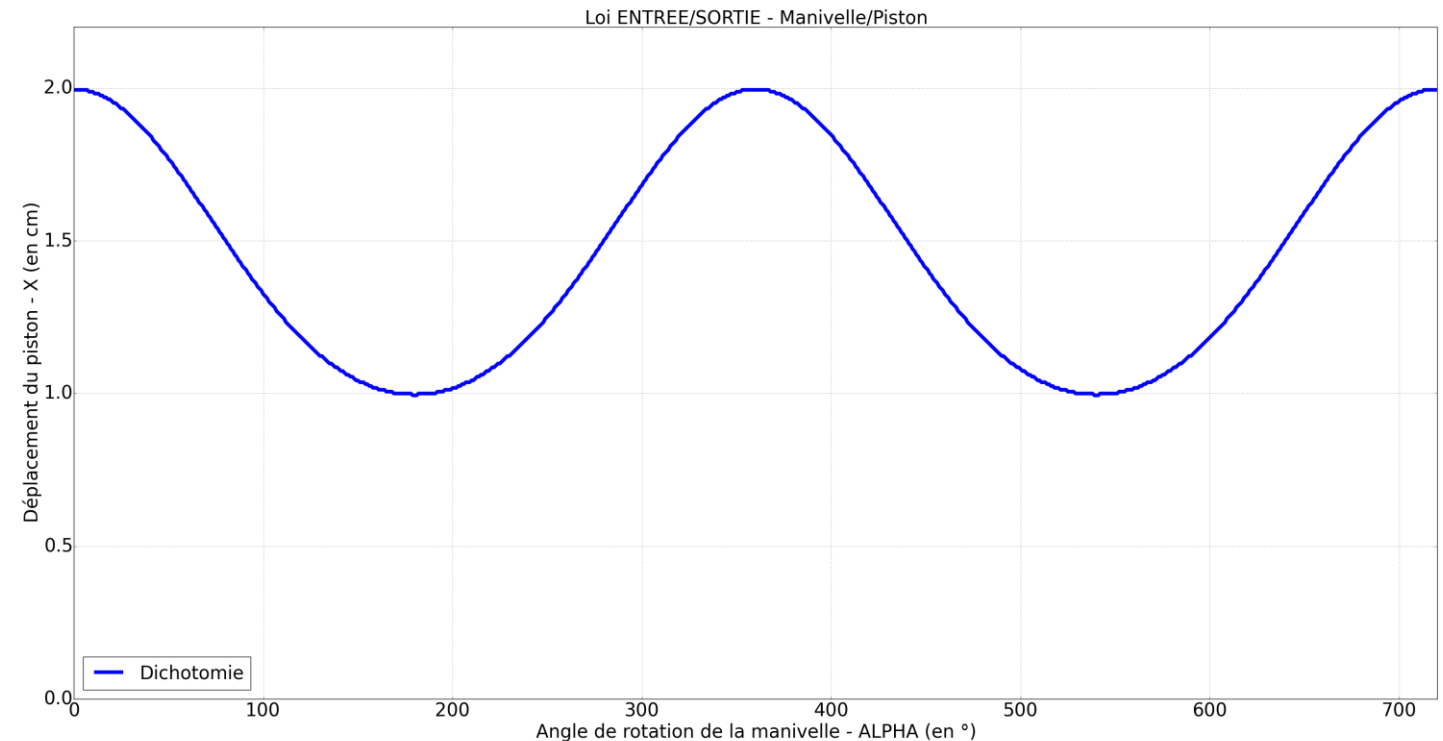


# Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Tracé de la loi entrée-sortie

Dichotomie

```
def Dichotomie(f,a,b,epsilon):  
    A = a  
    B = b  
    while abs(B-A)>epsilon:  
        c = (B+A)/2  
        if f(A)*f(c)>0:  
            A = c  
        else:  
            B = c  
    return A
```



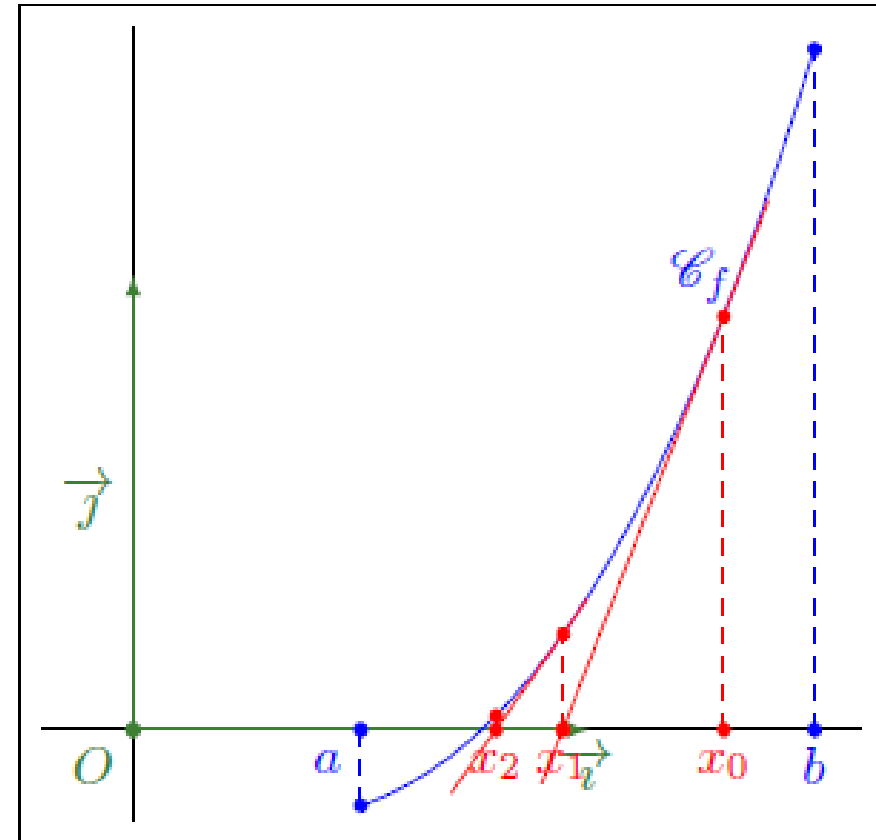
# Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Tracé de la loi entrée-sortie

Méthode de Newton

Partant d'une valeur initiale  $x_0$ , on suit la tangente à  $f$  en  $x_0$  jusqu'à rencontrer l'axe des abscisses, ce qui nous donne une valeur  $x_1$ .

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

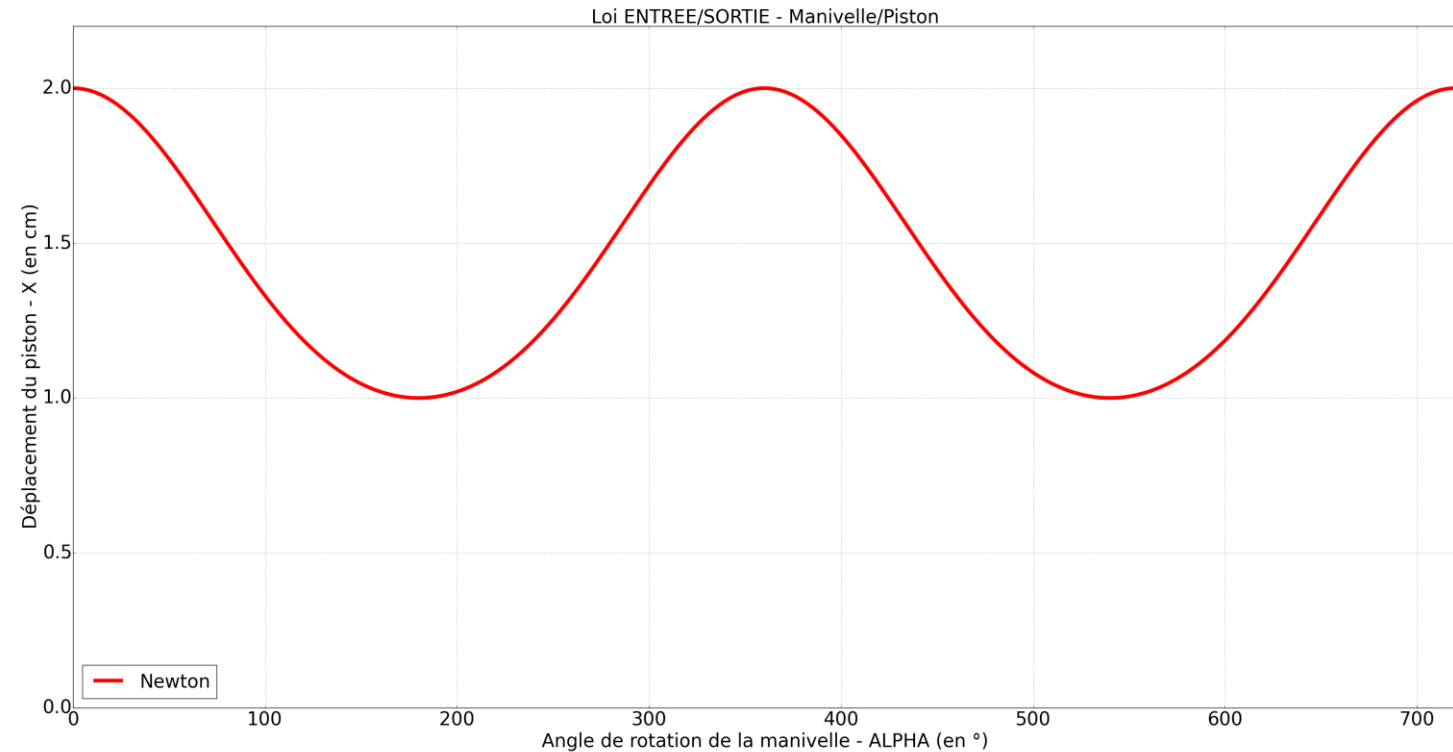


# Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Tracé de la loi entrée-sortie

Méthode de Newton

```
def Newton(f, fprime, x0, epsilon):  
    x = x0  
    while f(x-epsilon)*f(x+epsilon) > 0:  
        x = x-f(x)/fprime(x)  
    return x
```



# Chaînes cinématiques ouvertes (type bras de manipulation)

Tracé de la loi entrée-sortie

Comparaison des deux méthodes numériques

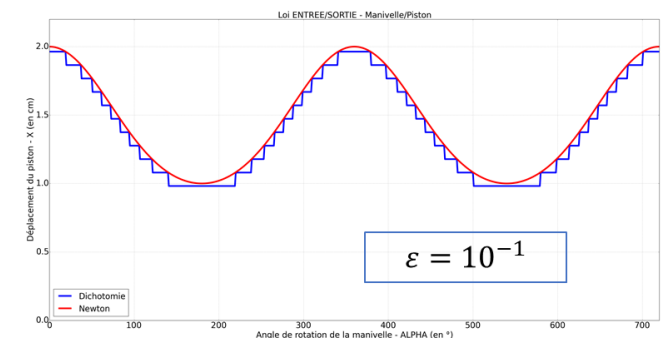
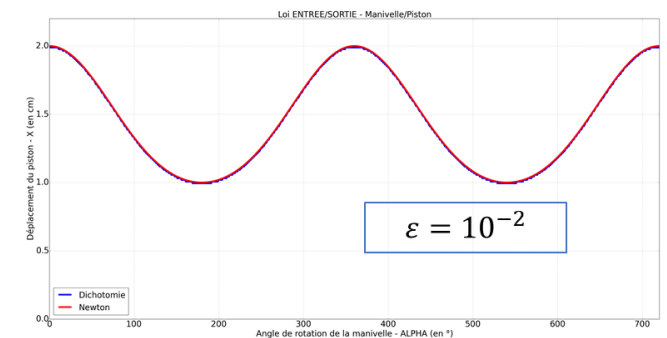
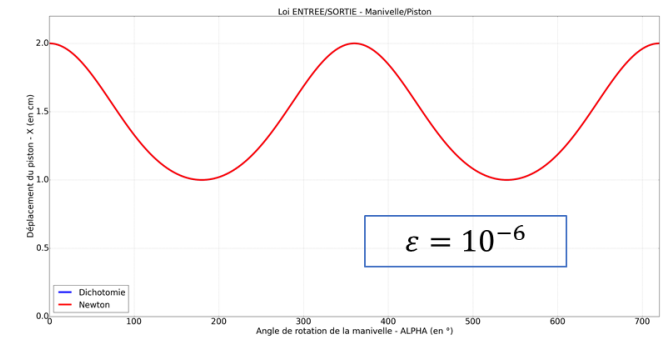
Méthodes → itératives

Newton → connaître l'expression de la dérivée de la fonction  $f$ .

Dichotomie → robustesse (converge → hypothèses  $f$  continue et  $f(a).f(b) \leq 0$ ).

Remarque :

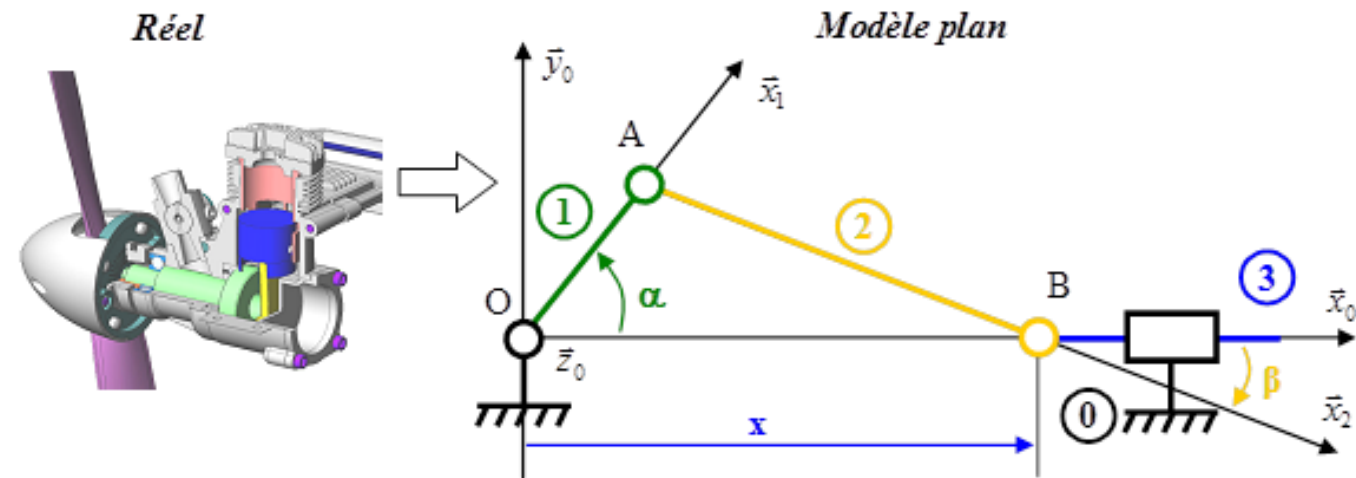
- Dichotomie → `scipy.optimize.bisect`
- Newton → `scipy.optimize.newton`.





# Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture cinématique



Fermeture cinématique par composition des mouvements.

On obtient alors deux équations vectorielles (composition des vecteurs vitesses de rotation et des vecteurs vitesses instantanées).

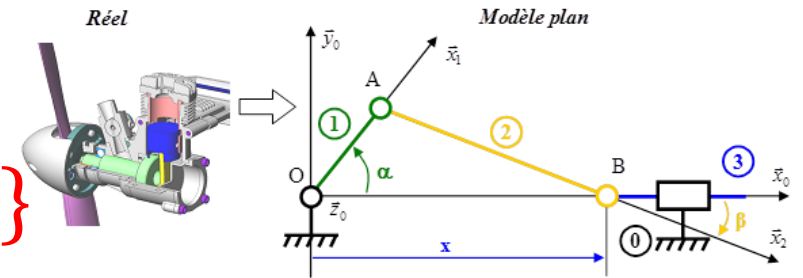
Equations obtenues par fermeture de chaîne cinématique = dérivées des équations obtenues par fermeture géométrique  $\rightarrow$  2 approches équivalentes

# Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture cinématique

Fermeture cinématique :

$$\{V_{0/3}\} + \{V_{3/2}\} + \{V_{2/1}\} + \{V_{1/0}\} = \{0\}$$



$$\text{Soit : } \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{0/3}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 0/3}} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 3/2}} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} \end{Bmatrix}_A + \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{A \in 1/0}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{0} \end{Bmatrix}_A$$

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{0/3}} + \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{V_{A \in 0/3}} + \overrightarrow{V_{A \in 3/2}} + \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} + \overrightarrow{V_{A \in 1/0}} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

# Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture cinématique

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Omega}_{0/3} + \overrightarrow{\Omega}_{3/2} + \overrightarrow{\Omega}_{2/1} + \overrightarrow{\Omega}_{1/0} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V}_{A \in 0/3} + \overrightarrow{V}_{A \in 3/2} + \overrightarrow{V}_{A \in 2/1} + \overrightarrow{V}_{A \in 1/0} = \vec{0} \end{cases}$$

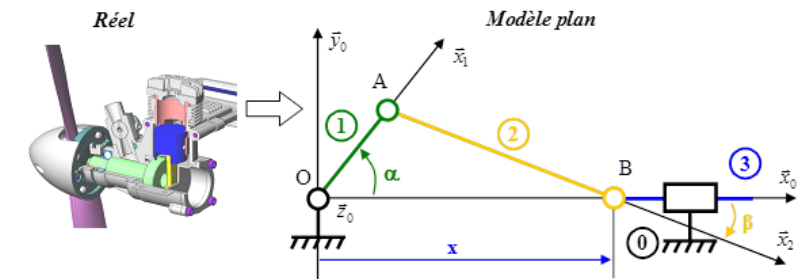
Avec :

$$\overrightarrow{V}_{A \in 0/3} = -\overrightarrow{V}_{B \in 3/0} = -\dot{x} \cdot \vec{x}_0$$

$$\overrightarrow{V}_{A \in 3/2} = \overrightarrow{V}_{B \in 3/2} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{3/2} = L_2 \cdot \vec{x}_2 \wedge -\dot{\beta} \cdot \vec{z}_0 = L_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2$$

$$\overrightarrow{V}_{A \in 2/1} = \vec{0}$$

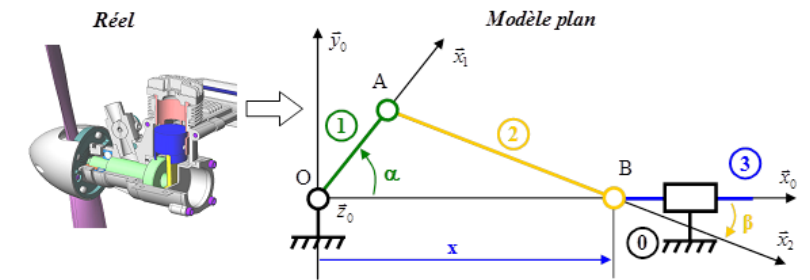
$$\overrightarrow{V}_{A \in 1/0} = L \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1$$



# Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture cinématique

$$\text{Soit : } -\dot{x} \cdot \vec{x}_0 + L_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{y}_2 + L_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \vec{y}_1 = \vec{0}$$



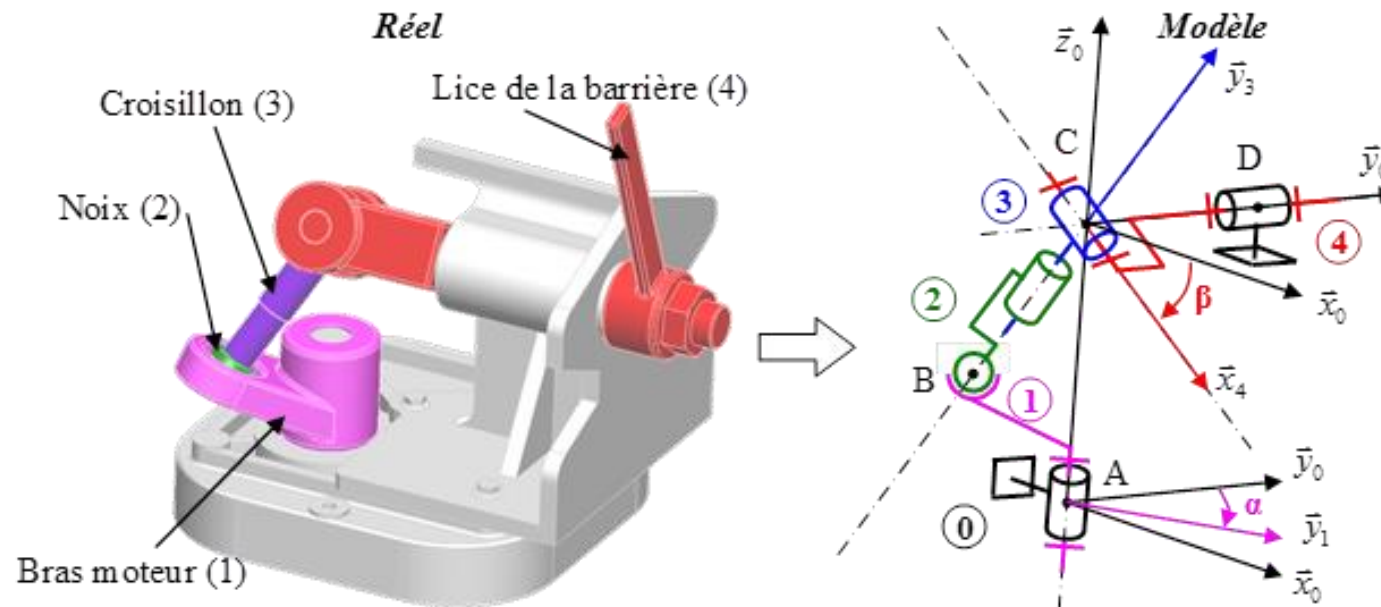
$$\begin{cases} -L_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \sin \alpha - L_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \sin \beta - \dot{x} = 0 \\ L_1 \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \alpha + L_2 \cdot \dot{\beta} \cdot \cos \beta = 0 \end{cases}$$

→ 2 équations scalaires = dérivée des 2 équations scalaires de la fermeture géométrique

# Chaînes cinématiques fermées

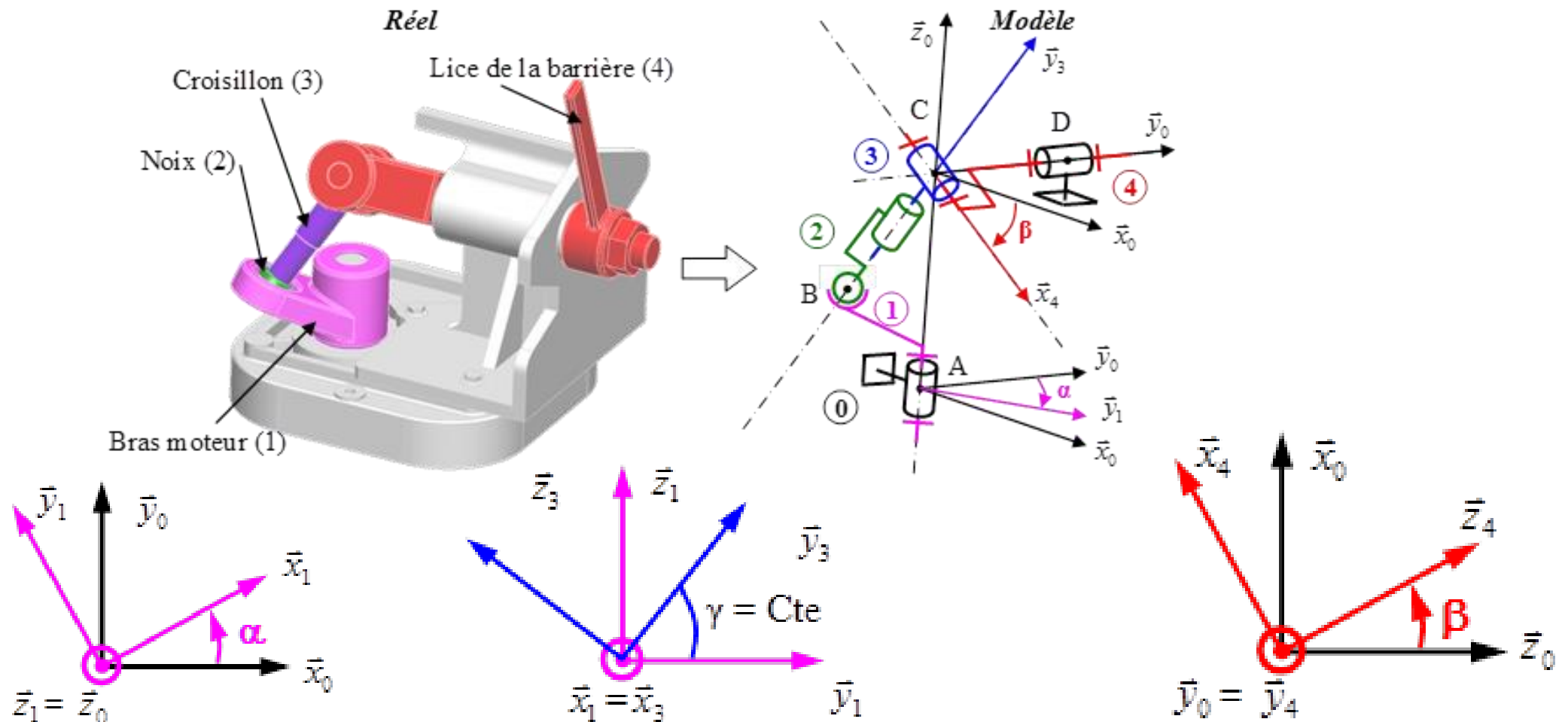
Calcul d'une loi d'entrée sortie par produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante

La loi entrée sortie dans le cas de chaînes fermées  $\rightarrow$  particularité angulaire du système (conservation d'une valeur angulaire lors du mouvement par exemple).



# Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante



# Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante

Particularité angulaire =  $\overrightarrow{BC}$  est toujours orthogonal à  $\overrightarrow{x_4}$ .

$$\rightarrow \overrightarrow{y_3} \cdot \overrightarrow{x_4} = 0$$

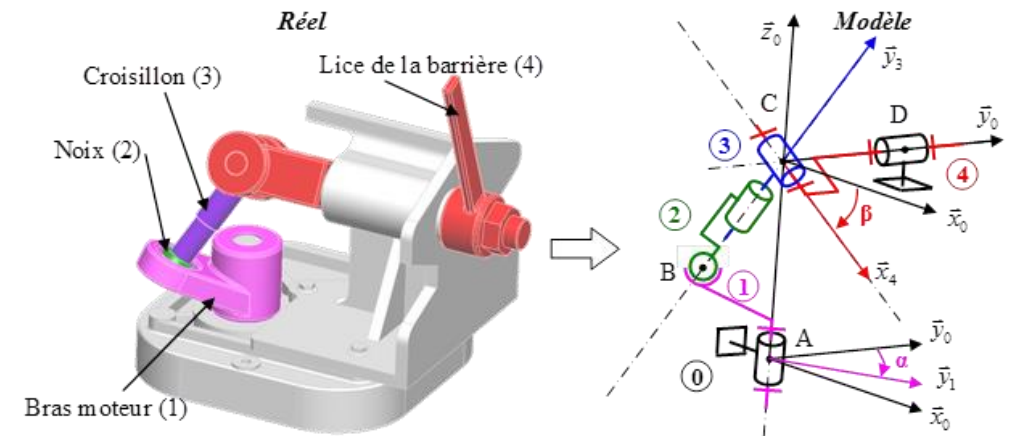
$$\overrightarrow{y_3} = \cos\gamma \cdot \overrightarrow{y_1} + \sin\gamma \cdot \overrightarrow{z_1} \text{ et } \overrightarrow{x_4} = -\sin\beta \cdot \overrightarrow{z_0} + \cos\beta \cdot \overrightarrow{x_0}$$

$$\text{Soit : } (\cos\gamma \cdot \overrightarrow{y_1} + \sin\gamma \cdot \overrightarrow{z_1}) \cdot (-\sin\beta \cdot \overrightarrow{z_0} + \cos\beta \cdot \overrightarrow{x_0}) = 0$$

$$-\cos\gamma \cdot \sin\beta \cdot \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{y_1} - \sin\gamma \cdot \sin\beta \cdot \overrightarrow{z_0} \cdot \overrightarrow{z_1} + \cos\gamma \cdot \cos\beta \cdot \overrightarrow{x_0} \cdot \overrightarrow{y_1} + \sin\gamma \cdot \cos\beta \cdot \overrightarrow{x_0} \cdot \overrightarrow{z_1} = 0$$

$$-\sin\gamma \cdot \sin\beta - \cos\gamma \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha = 0$$

$$-\sin\alpha = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$





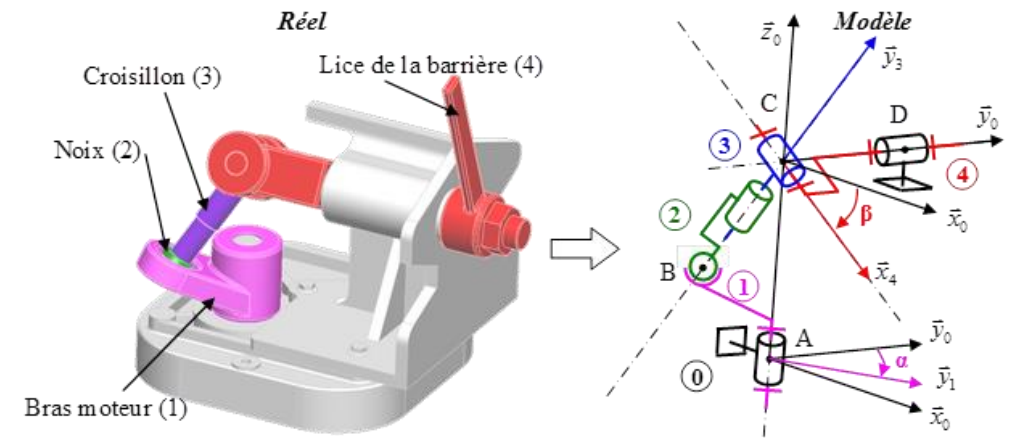
# Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante

Loi d'entrée sortie :

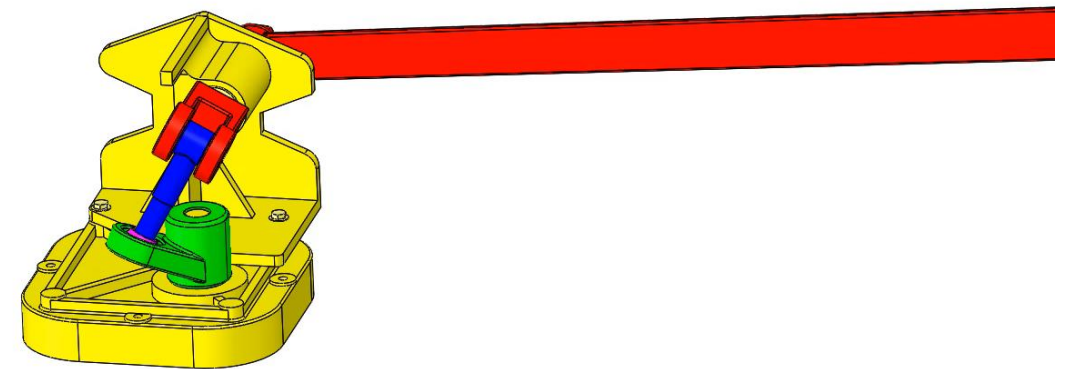
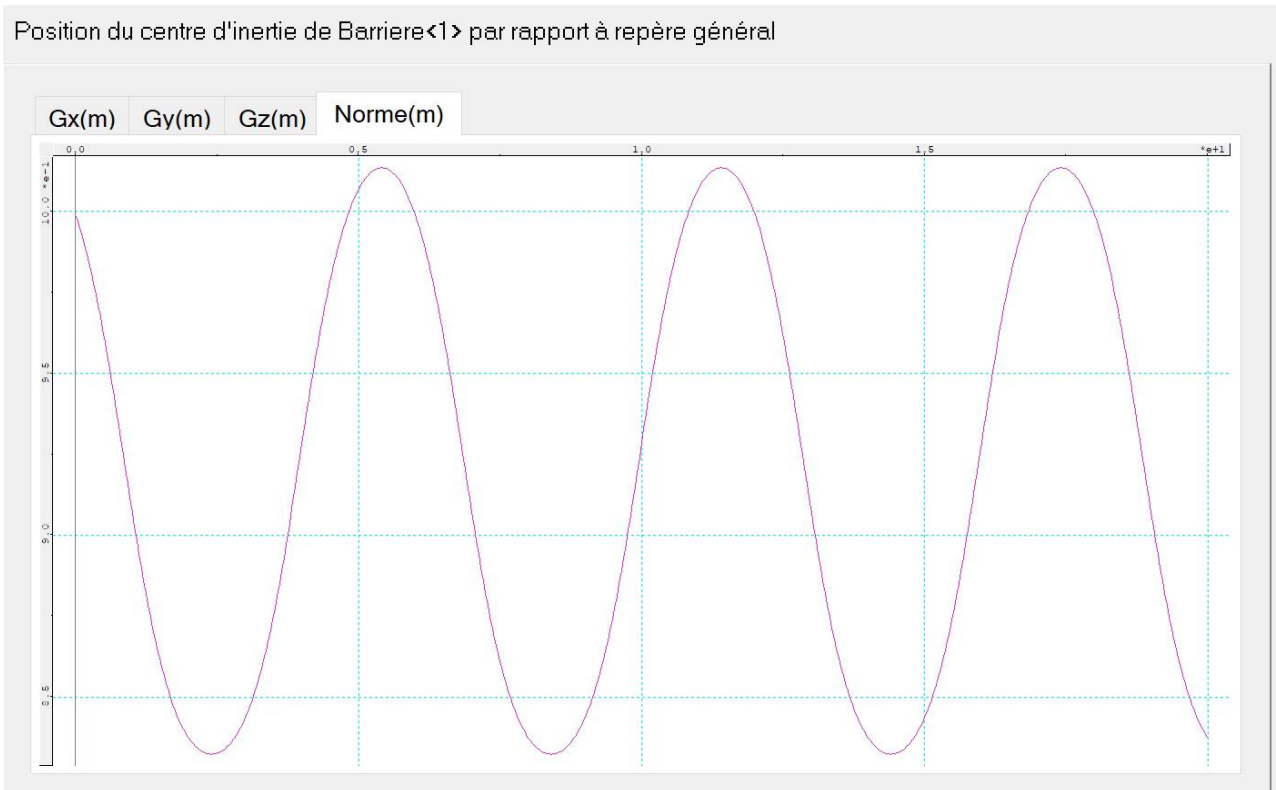
$$-\sin\alpha = \tan\gamma \cdot \tan\beta$$

→ Pour  $\gamma = \pi/4$  l'amplitude de la lice =  $\pi/2$



# Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie par produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante



# Chaînes cinématiques fermées

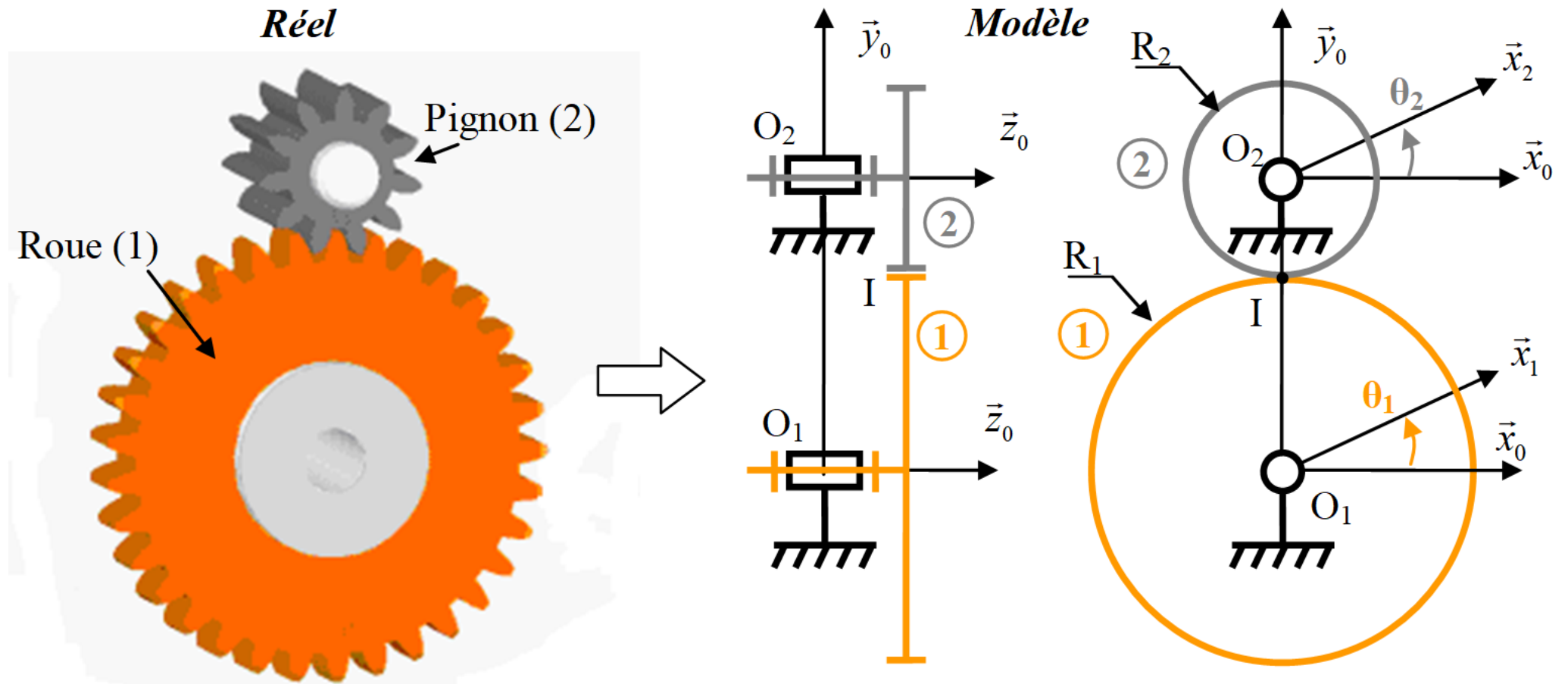
Calcul d'une loi d'entrée sortie à partir d'une condition de non glissement

**La loi entrée sortie dans le cas de chaînes fermées**

**→ Condition de non glissement au point de contact entre deux pièces du mécanisme.**

# Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie à partir d'une condition de non glissement



La condition de non glissement au point de contact s'écrit  $\overrightarrow{V_{I \in 2/1}} = \vec{0}$ .

# Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie à partir d'une condition de non glissement

$$\vec{V}_{I \in 2/1} = \vec{0}$$

$$\vec{V}_{I \in 2/1} = \vec{V}_{I \in 2/0} - \vec{V}_{I \in 1/0} = \vec{0}$$

Nature du mouvement de 2/0 ? :  
Rotation autour de l'axe  $(O_2, \vec{z}_0)$

Champ des vitesses :

$$\vec{V}_{I \in 2/0} = \vec{V}_{O_2 \in 2/0} + \vec{IO}_2 \wedge \vec{\Omega}_{2/0}$$

avec  $\vec{V}_{O_2 \in 2/0} = \vec{0}$  et  $\vec{IO}_2 \wedge \vec{\Omega}_{2/0} = R_2 \cdot \vec{y}_0 \wedge \dot{\theta}_2 \cdot \vec{z}_0 = R_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{x}_0$

$\rightarrow \vec{V}_{I \in 2/0} = R_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{x}_0$

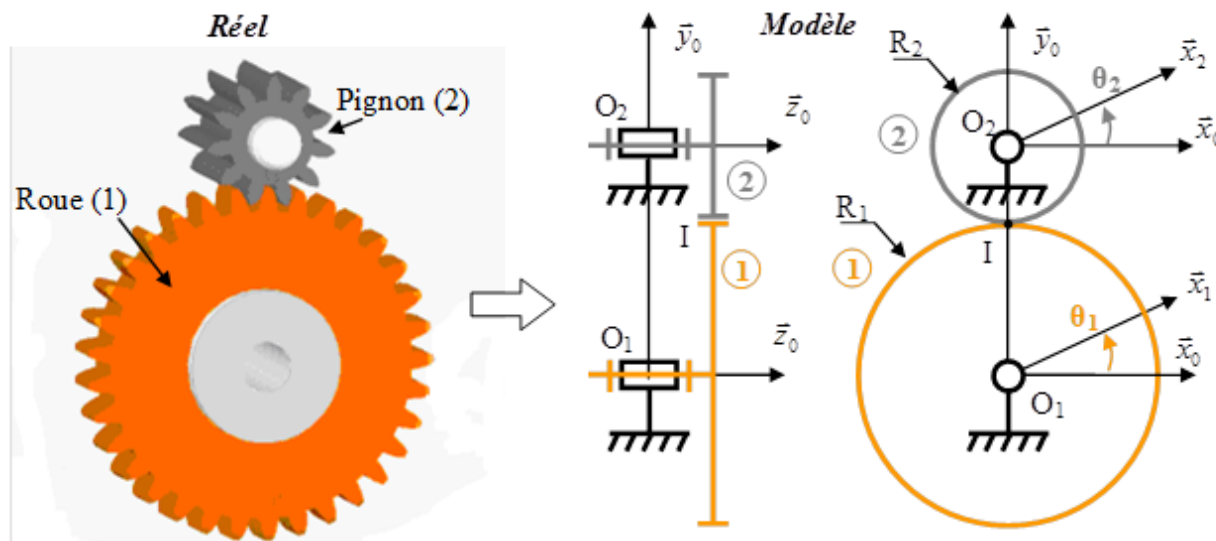
Nature du mouvement de 1/0 ? :  
Rotation autour de l'axe  $(O_1, \vec{z}_0)$

Champ des vitesses :

$$\vec{V}_{I \in 1/0} = \vec{V}_{O_1 \in 1/0} + \vec{IO}_1 \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$$

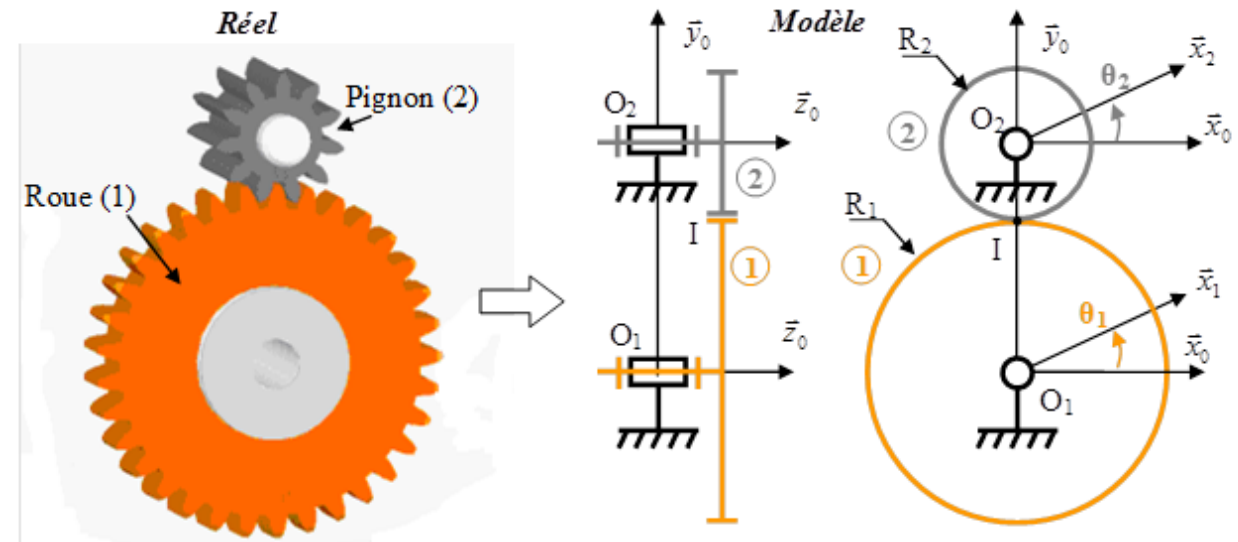
avec  $\vec{V}_{O_1 \in 1/0} = \vec{0}$  et  $\vec{IO}_1 \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = -R_1 \cdot \vec{y}_0 \wedge \dot{\theta}_1 \cdot \vec{z}_0 = -R_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_0$

$\rightarrow \vec{V}_{I \in 1/0} = -R_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_0$



# Chaînes cinématiques fermées

Calcul d'une loi d'entrée sortie à partir d'une condition de non glissement



$$\text{Soit } \overrightarrow{V_{I \in 2/1}} = \overrightarrow{V_{I \in 2/0}} - \overrightarrow{V_{I \in 1/0}} = R_2 \cdot \dot{\theta}_2 \cdot \vec{x}_0 + R_1 \cdot \dot{\theta}_1 \cdot \vec{x}_0 = \vec{0}$$

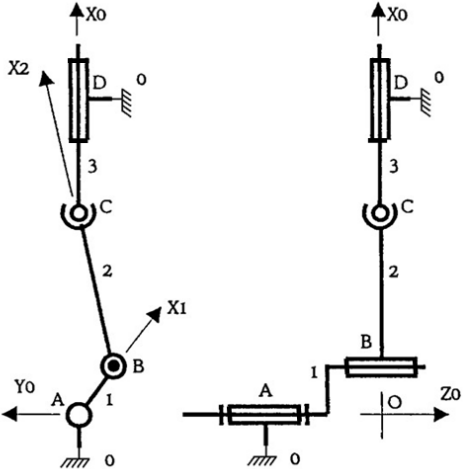
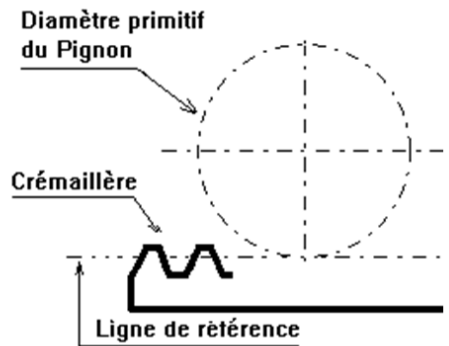
$$\rightarrow R_2 \cdot \dot{\theta}_2 + R_1 \cdot \dot{\theta}_1 = 0$$

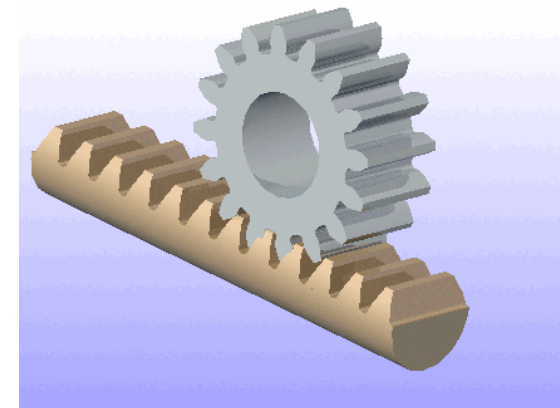
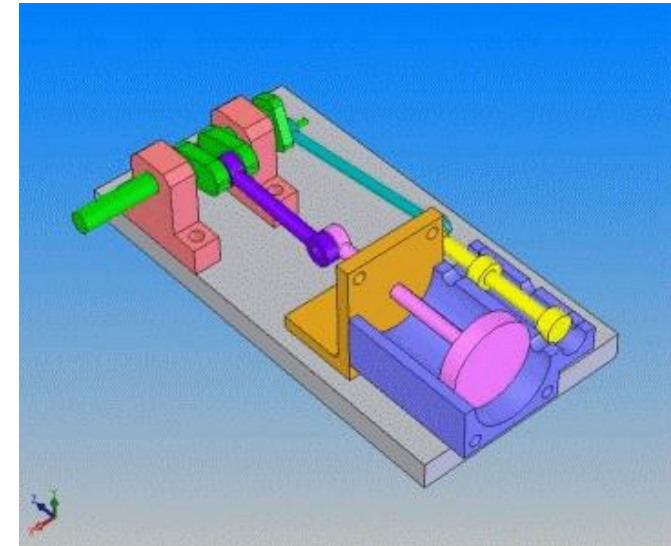
Soit la loi d'entrée sortie :

$$\frac{\dot{\theta}_2}{\dot{\theta}_1} = -\frac{R_1}{R_2}$$

# Chaînes cinématiques fermées

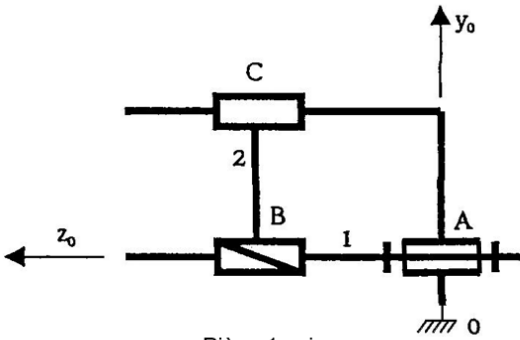
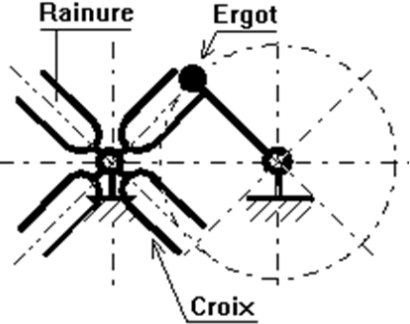
## Transformations de mouvement classiques

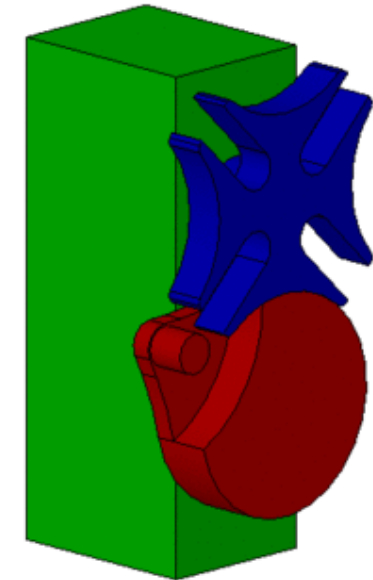
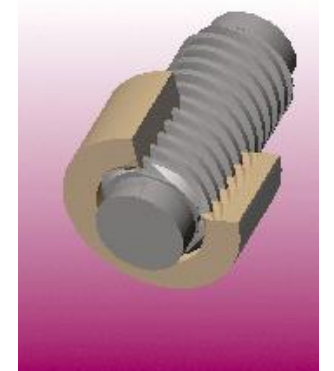
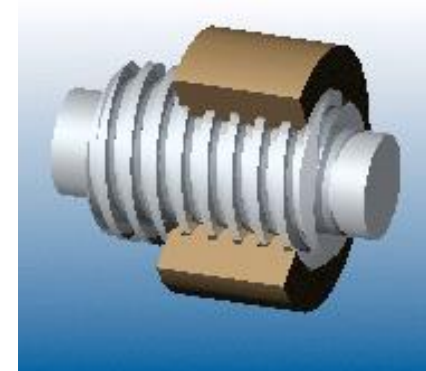
<b>Bielle-manivelle.</b>	 <p>Pièce 1 : manivelle (ou maneton ou vilebrequin) Pièce 2 : bielle Pièce 3 : piston (ou coulisseau)</p>	<p><b>Transformation :</b> Rotation continue en translation alternative (et réciproquement parfois).</p> <p><b>Réversibilité :</b> parfois.</p> <p><b>Utilisation :</b> Moteurs thermiques, compresseurs, certaines pompes et moteurs hydrauliques, marteau perforateur...</p> <p>NB : Dans un moteur thermique ou une pompe, le bâti au niveau du piston s'appelle chemise ou cylindre.</p> <p><b>Caractéristiques géométriques :</b> <math> OB  = e</math>    <math> BC  = L</math> Très souvent : <math>L &gt;&gt; e</math> (<math>L &gt; 5.e</math> suffit en général pour pouvoir faire cette hypothèse).</p> <p><b>Paramètres :</b> <math>(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \alpha</math>    <math>(\vec{x}_0, \vec{x}_2) = \beta</math>    <math>\vec{OC} = X.\vec{x}_0</math></p>
<b>Pignon-crémaillère</b>	 <p>Diamètre primitif du Pignon Crémaillère Ligne de référence</p>	<p><b>Transformation :</b> Rotation continue en translation continue (et réciproquement).</p> <p><b>Réversibilité :</b> toujours.</p> <p><b>Utilisation :</b> Porte de TGV, porte de garage, direction de voiture, bras manipulateur...</p> <p><b>Caractéristiques géométriques :</b> Diamètre du pignon.</p> <p><b>Paramètres :</b> Angle de rotation du pignon, et position de la crémaillère.</p>



# Chaînes cinématiques fermées

## Transformations de mouvement classiques

Vis-écrou	 <p>Pièce 1 : vis Pièce 2 : coulisseau (ou écrou)</p>	<p><b>Transformation :</b> Rotation continue en translation continue.</p> <p><b>Réversibilité :</b> parfois. Elle dépend des matériaux en contact et de l'angle de l'hélice. Ce système est toujours réversible lorsque l'on a interposition d'éléments roulants limitant le frottement.</p> <p><b>Utilisation :</b> Vérins électriques, chariots de machine outil, pilote automatique, élévateur...</p> <p><b>Caractéristiques géométriques :</b> Pas de la vis : <math>p</math> (mm) à droite</p> <p><b>Paramètres :</b> <math>(\bar{x}_0, \bar{x}_1) = \theta</math>    <math>\overline{AB} = \lambda \cdot \bar{z}_0</math></p>
Croix de Malte		<p><b>Transformation :</b> Rotation continue en rotation intermittente.</p> <p><b>Réversibilité :</b> jamais.</p> <p><b>Utilisation :</b> Plateau tournant de machine de transfert, indexage...</p> <p><b>Caractéristiques géométriques :</b> Angle entre les différentes rainures, et rayon de l'ergot.</p> <p><b>Paramètres :</b> Angle de rotation de l'ergot, et angle de rotation de la croix.</p>

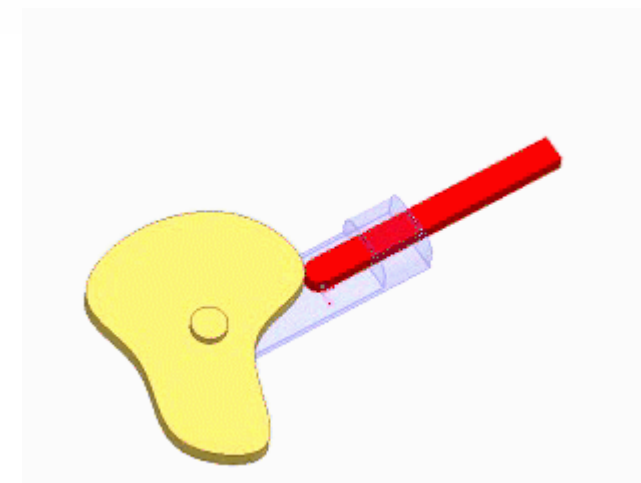
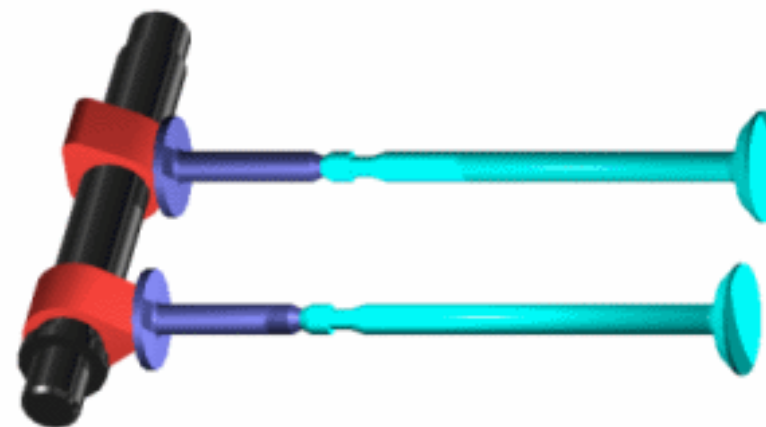




# Chaînes cinématiques fermées

## Transformations de mouvement classiques

<p><b>Excentrique</b></p>	<p>Pièce 1 : excentrique Pièce 2 : piston (ou coulisseau)</p>	<p><b>Transformation :</b> Rotation continue en translation alternative.</p> <p><b>Réversibilité :</b> jamais.</p> <p><b>Utilisation :</b> Pompes hydrauliques, taille haie, certains mécanismes d'ablocage (blocage d'une pièce sur une table).</p> <p><b>Caractéristiques géométriques :</b> <math> BC  = R</math>    <math> OB  = e</math></p> <p><b>Paramètres :</b> <math>(x_0, x_1) = \theta</math>    <math>\overline{OD} = X \cdot \overline{x_0}</math>    <math>\overline{CD} = \lambda \cdot \overline{y_0}</math></p> <p><i>NB : L'excentrique est une came radiale circulaire</i></p>
<p><b>Came radiale</b></p>		<p><b>Même principe que l'excentrique :</b> L'excentrique qui était un disque est remplacée par une pièce de forme aléatoire (la came). Le schéma est identique au précédent mais avec R variable (mais connu).</p> <p><b>Utilisation :</b> Pompes hydrauliques, certains mécanismes d'ablocage, arbre à cames de moteur, ferme-porte...</p>
<p><b>Came axiale</b></p>	<p>Pièce 1 : came (ici un plateau incliné)</p> <p>La came peut être un cylindre sur lequel est usinée une rainure de forme quelconque.</p>	<p><b>Transformation :</b> Rotation continue en translation alternative.</p> <p><b>Réversibilité :</b> jamais.</p> <p><b>Utilisation :</b> Pompes hydrauliques.</p> <p><b>Caractéristiques géométriques :</b> <math>(x_1, x) = (y_1, y) = \alpha = \text{constant}</math>    <math> OD  = R</math></p> <p>Le plan <math>(O, \vec{x}, \vec{y})</math> définit le plateau.</p> <p><b>Paramètres :</b> <math>(y_0, y_1) = \theta</math>    <math>\overline{CD} = X \cdot \overline{x_0}</math></p>



# Chaînes cinématiques fermées




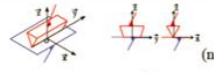

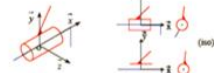







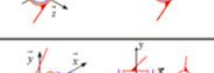

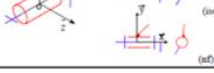

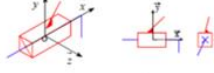

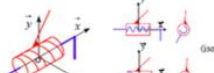


## Transformations de mouvement classiques

Remarque : Rendement des différents systèmes de transmission :

- Came → 35 %
- Excentrique → 35 %
- Bielle-Manivelle → 40 %
- Vis/Ecrou → 50 %
- Croix de Malte → 60 %
- Vis/Ecrou à bille → 95 %
- Pignon/Crémaillère et Engrenages → 98 %

# Liaisons normalisées

## Rappels sur les torseurs

Surfaces en contact	Nom de la liaison	Schématisation Vue isométrique / Vues projetées	Degrés de liberté / Torseur cinématique
Plan/Plan	Liaison appui-plan 		2 translations / 1 rotation $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & v_y \\ v_z & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$
Cylindre/plan	Liaison linéaire-rectiligne 		2 translations / 2 rotations $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ v_y & v_z \\ \omega_x & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$
Cylindre/cylindre	Liaison pivot-glissant 		1 translation / 1 rotation $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} v_x & v_y \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$
Sphère/plan	Liaison ponctuelle ou sphère-plan 		2 translations / 3 rotations $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} v_x & v_y \\ v_y & v_z \\ \omega_x & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$
Sphère/cylindre	Liaison linéaire-annulaire ou sphère-cylindre 		1 translation / 3 rotations $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} v_x & v_y \\ v_y & 0 \\ \omega_x & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$
Sphère/sphère	Liaison rotule ou sphérique 		0 translation / 3 rotations $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$
Composée : cylindre/ cylindre et plan/plan	Liaison pivot 		0 translation / 1 rotation $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} v_x & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$
Composée : plan/plan et plan/plan	Liaison glissière 		1 translation / 0 rotation $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$
Hélicoïde/ hélicoïde	Liaison hélicoïdale 		1 translation liée à 1 rotation $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} v_x & v_y \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$ Avec $v_y = \frac{p}{2\pi} \omega_x$
Composée : sphère/ sphère et cylindre/ plan	Liaison sphérique à doigt 		0 translation / 2 rotations $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} v_x & 0 \\ 0 & 0 \\ \omega_x & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$
	Liaison encastrement 		0 translation / 0 rotation $\{V_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$

# Liaisons normalisées

## Rappels sur les torseurs

Définition : Une liaison équivalente est une liaison du tableau normalisé autorisant les mêmes mouvements et transmettant les mêmes efforts que l'association de liaisons en série ou en parallèle.

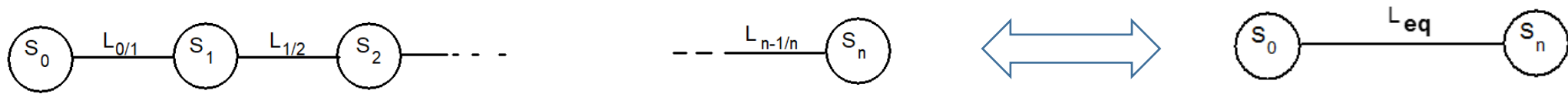
Remarques : Il n'est pas toujours possible de trouver une liaison équivalente.

# Liaisons normalisées

## Rappels sur les torseurs

### Liaisons en série

#### Grphe des liaisons :



**Liaison équivalente** :  $L_{eq} \rightarrow$  cinématiquement équivalente aux  $L_n$   
 $\rightarrow$  si  $\rightarrow$  autorise le même mouvement relatif

#### Torseur cinématique :

Loi de composition des mouvements :  $\left\{ \mathbf{V}_{(\mathcal{L}_{eq})} \right\}_M = \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \mathbf{V}_{(\mathcal{S}_{i+1}/\mathcal{S}_i)} \right\}_M$

$$\left\{ \mathbf{V}_{(\mathcal{L}_{eq})} \right\}_M = \left\{ \mathbf{V}_{(\mathcal{L}_{0/1})} \right\}_M + \left\{ \mathbf{V}_{(\mathcal{L}_{1/2})} \right\}_M + \left\{ \mathbf{V}_{(\mathcal{L}_{2/3})} \right\}_M + \dots + \left\{ \mathbf{V}_{(\mathcal{L}_{n-1/n})} \right\}_M$$

# Liaisons normalisées

## Rappels sur les torseurs

### Liaisons en série

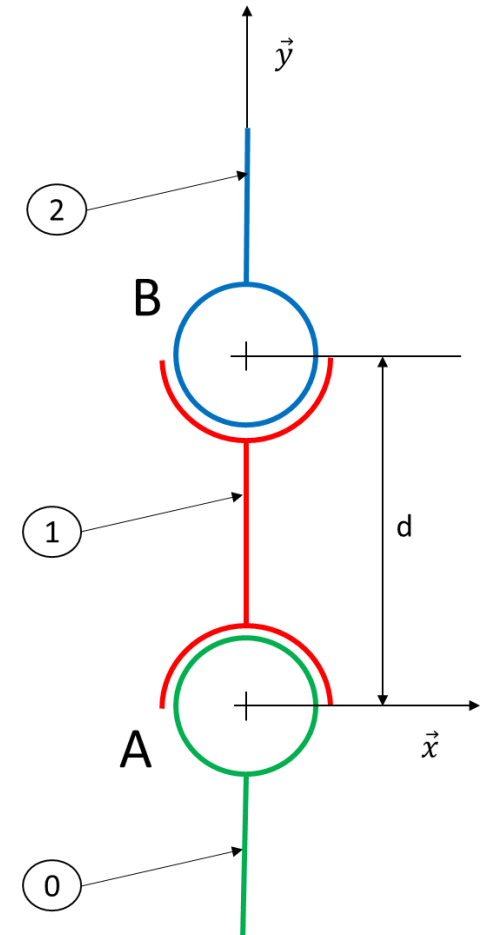
#### Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en série :

Torseur cinématique de la liaison sphérique  $L_{2/1}$ :

$$\{V_{L_{2/1}}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{x\ 2/1} & 0 \\ \omega_{y\ 2/1} & 0 \\ \omega_{z\ 2/1} & 0 \end{Bmatrix}_{B,b}$$

Torseur cinématique de la liaison sphérique  $L_{1/0}$  :

$$\{V_{L_{1/0}}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{x\ 1/0} & 0 \\ \omega_{y\ 1/0} & 0 \\ \omega_{z\ 1/0} & 0 \end{Bmatrix}_{A,b}$$



# Liaisons normalisées

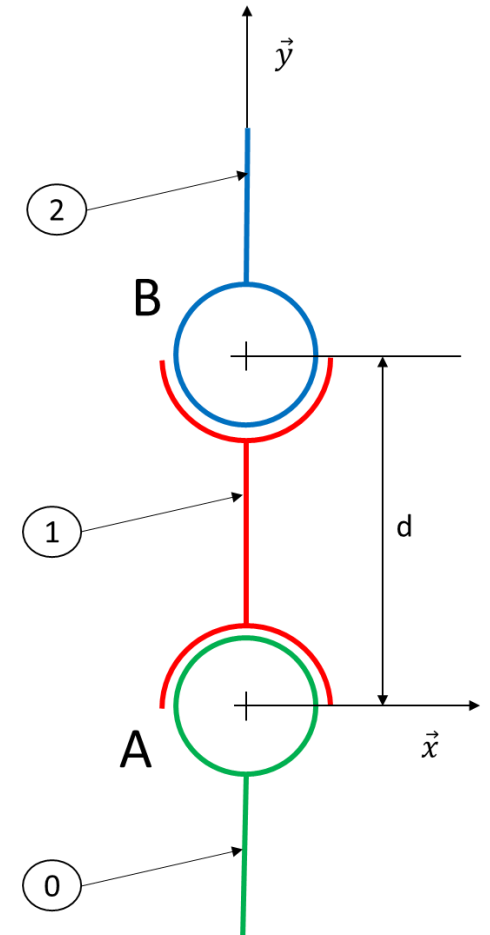
## Rappels sur les torseurs

### Liaisons en série

### Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en série :

Transfert de la liaison  $L_{2/1}$  en A :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{A \in 2/1}} &= \underbrace{\overrightarrow{V_{B \in 2/1}}}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}_b \wedge \begin{pmatrix} \omega_{x \ 2/1} \\ \omega_{y \ 2/1} \\ \omega_{z \ 2/1} \end{pmatrix}_b \\ &= \begin{pmatrix} +d \cdot \omega_{z \ 2/1} \\ 0 \\ -d \cdot \omega_{x \ 2/1} \end{pmatrix}_b \end{aligned}$$



# Liaisons normalisées

## Rappels sur les torseurs

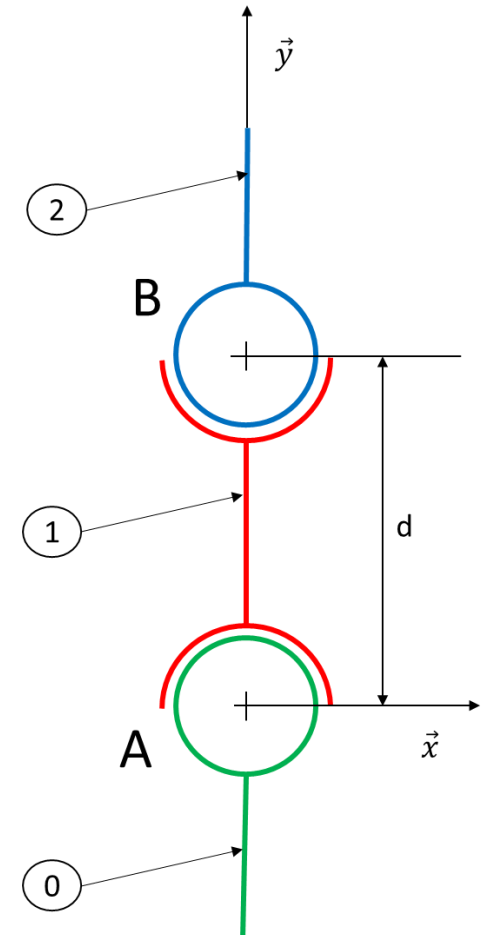
### Liaisons en série

**Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en série :**

$$\{V_{Leq}\}_{A,b} = \{V_{L_{2/1}}\}_{A,b} + \{V_{L_{1/0}}\}_{A,b}$$

$$\text{Soit : } \begin{cases} \omega_x eq = \omega_x 2/1 + \omega_x 1/0 \\ \omega_y eq = \omega_y 2/1 + \omega_y 1/0 \\ \omega_z eq = \omega_z 2/1 + \omega_z 1/0 \\ V_x eq = +d \cdot \omega_z 2/1 \\ V_y eq = 0 \\ V_z eq = -d \cdot \omega_x 2/1 \end{cases}$$

La seule composante nulle est  $V_y eq$ , la liaison équivalente est donc une liaison sphère-plan de normale  $(A, \vec{y})$ .



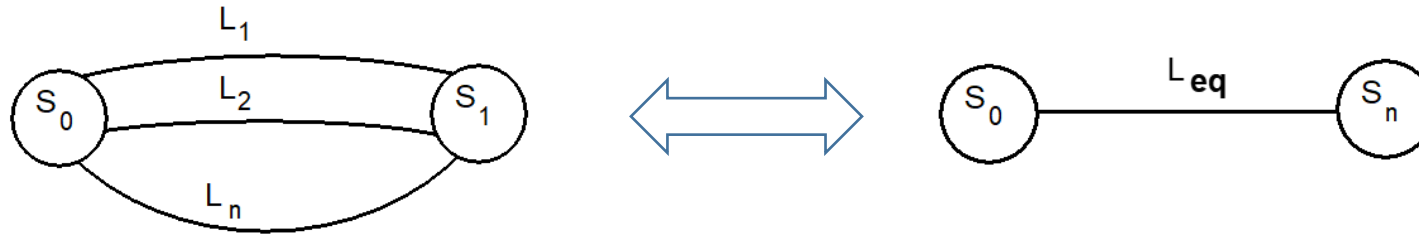


# Liaisons normalisées

## Rappels sur les torseurs

### Liaisons en parallèle

#### Grphe des liaisons :



**Liaison équivalente :** Torseur cinématique  $L_{eq} \rightarrow$  compatible avec tous les torseurs cinématiques des  $L_i$

**Torseur cinématique :**

$$\{V_{L_{eq}}\}_M = \{V_{L_i}\}_M \forall i$$

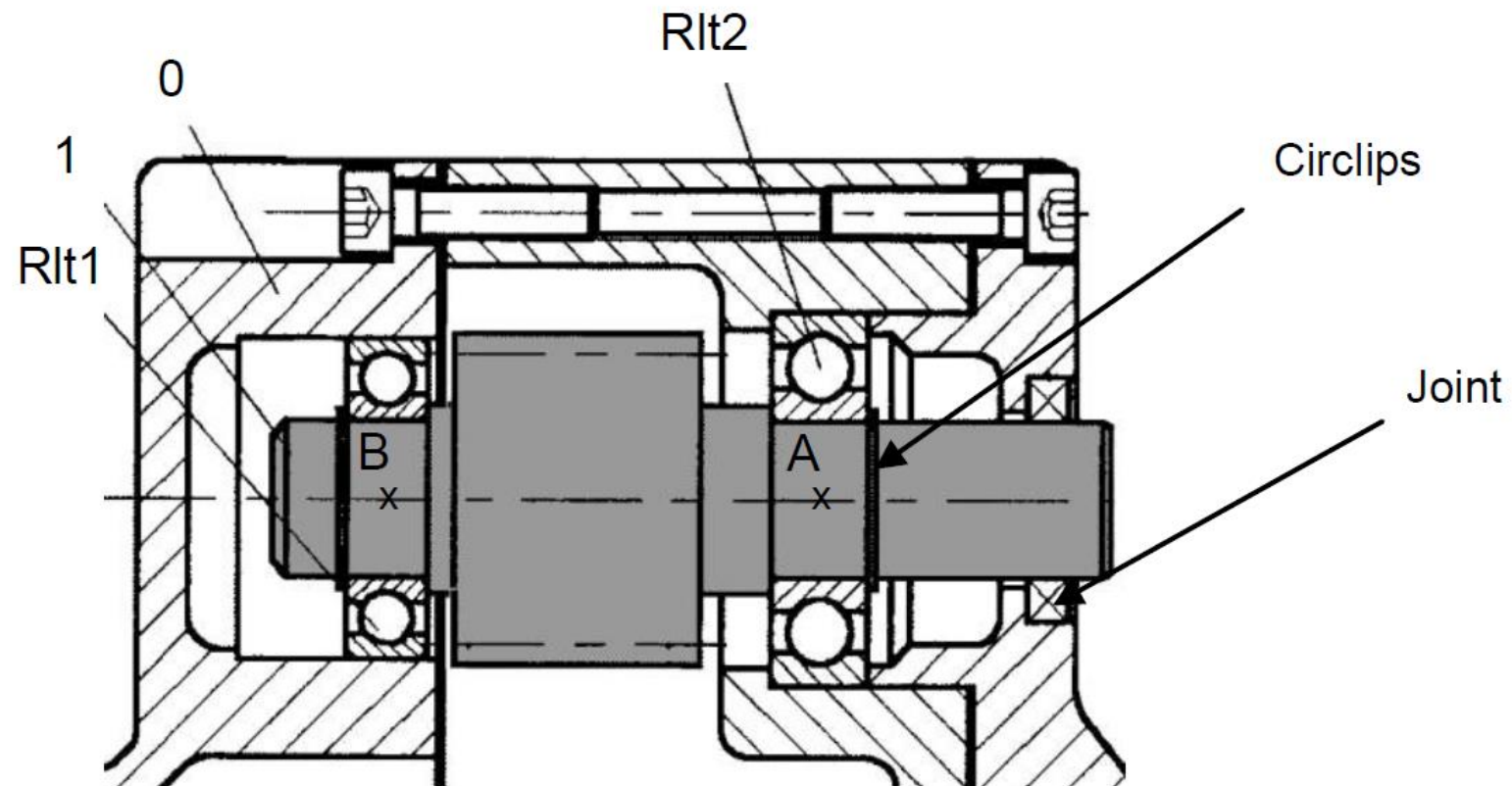
$$\{V_{L_{eq}}\}_M = \{V_{L_1}\}_M = \{V_{L_2}\}_M = \{V_{L_3}\}_M = \dots = \{V_{L_n}\}_M$$

# Liaisons normalisées

## Rappels sur les torseurs

### Liaisons en parallèle

### Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en parallèle :



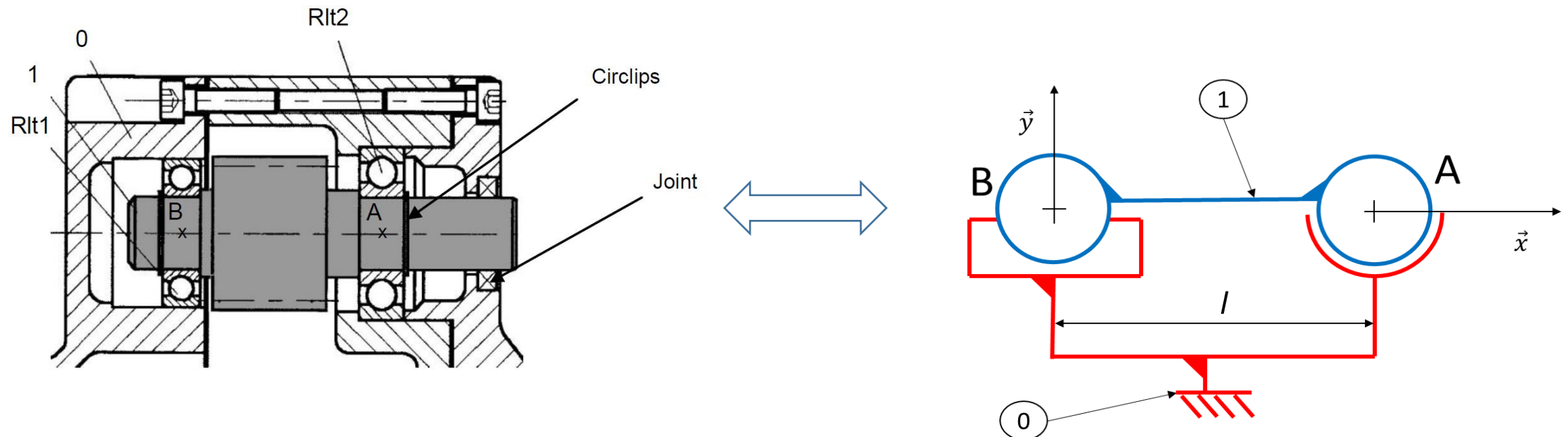
# Liaisons normalisées

## Rappels sur les torseurs

### Liaisons en parallèle

### Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en parallèle :

### Schéma cinématique mécanisme :



# Liaisons normalisées

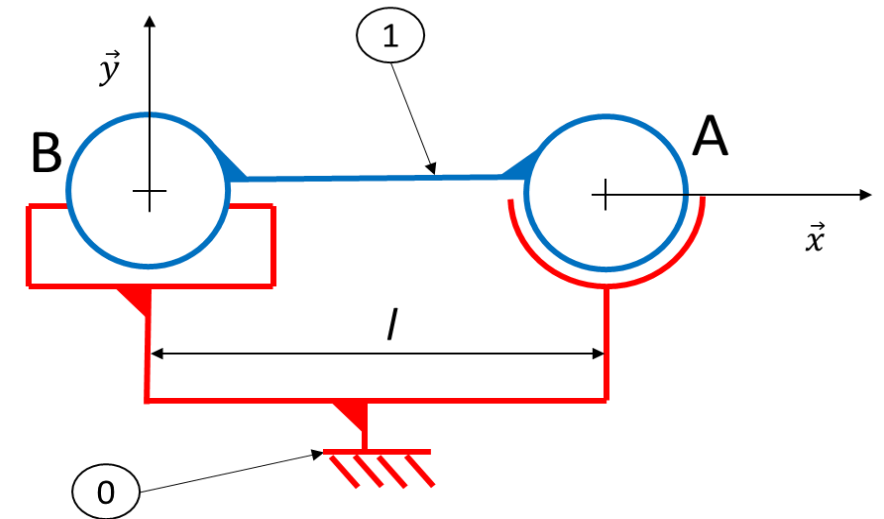
## Rappels sur les torseurs

### Liaisons en parallèle

#### Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en parallèle :

$$\text{Liaison sphérique en A : } \{V_{L_A}\} = \left. \begin{array}{l} \omega_{x A} \quad 0 \\ \omega_{y A} \quad 0 \\ \omega_{z A} \quad 0 \end{array} \right\}_{A,b}$$

$$\text{Liaison sphère-cylindre en B : } \{V_{L_B}\} = \left. \begin{array}{l} \omega_{x B} \quad V_{x B} \\ \omega_{y B} \quad 0 \\ \omega_{z B} \quad 0 \end{array} \right\}_{B,b}$$



# Liaisons normalisées

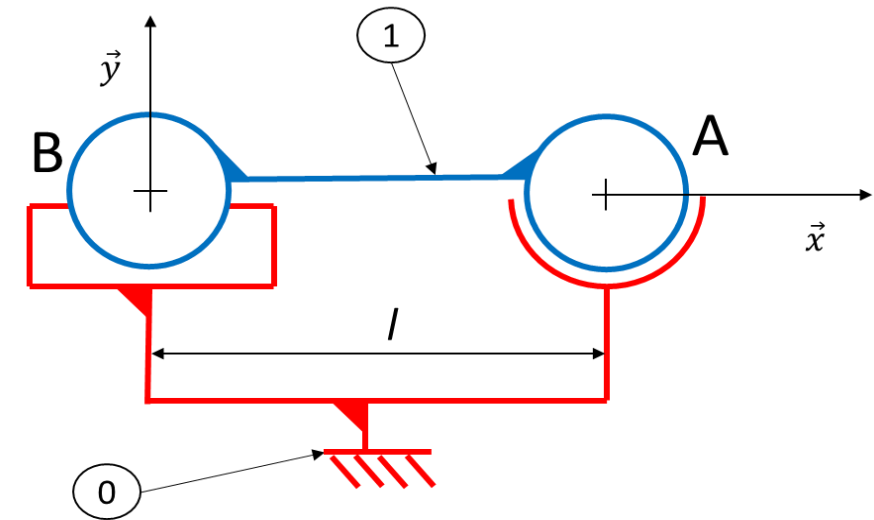
## Rappels sur les torseurs

### Liaisons en parallèle

### Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en parallèle :

Transfert de la liaison en A :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_{A \in 3_{B/0}}} &= \underbrace{\overrightarrow{V_{B \in 3_{B/0}}}}_{V_{xB} \vec{x}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \begin{pmatrix} V_{xB} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_b + \begin{pmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_b \wedge \begin{pmatrix} \omega_{xB} \\ \omega_{yB} \\ \omega_{zB} \end{pmatrix}_b \\ &= \begin{pmatrix} V_{xB} \\ +l \cdot \omega_{zA} \\ -l \cdot \omega_{yA} \end{pmatrix}_b \end{aligned}$$



# Liaisons normalisées

## Rappels sur les torseurs

### Liaisons en parallèle

### Exemple de recherche de liaison équivalente à des liaisons en parallèle :

$$\{V_{L_A}\}_{A,b} = \{V_{L_B}\}_{A,b} = \{V_{Leq}\}_{A,b}$$

$$\omega_{x A} = \omega_{x B} = \omega_{x eq} ;$$

$$\omega_{z A} = \omega_{z B} = \omega_{z eq} ;$$

$$+l \cdot \omega_{z B} = 0 ;$$

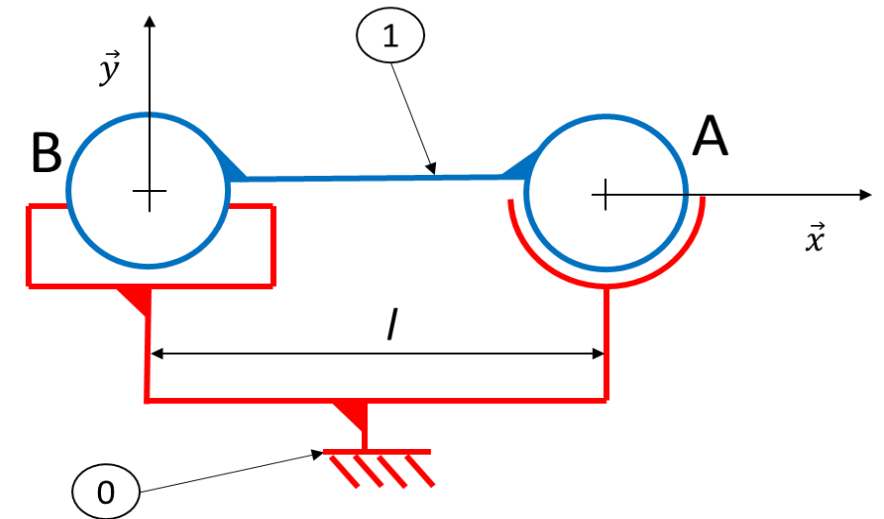
$$\omega_{y A} = \omega_{y B} = \omega_{y eq} ;$$

$$0 = V_{x B} = V_{x eq} ;$$

$$-l \cdot \omega_{y B} = 0$$

$$\{V_{Leq}\}_{A,b} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_{x eq} = \omega_{x A} = \omega_{x B} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\}_{A,b}$$

→ Liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x})$ .

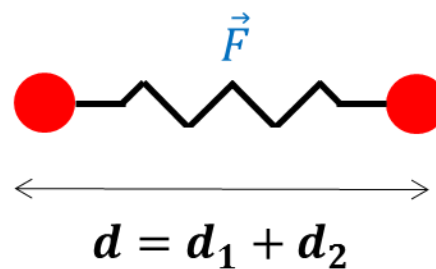
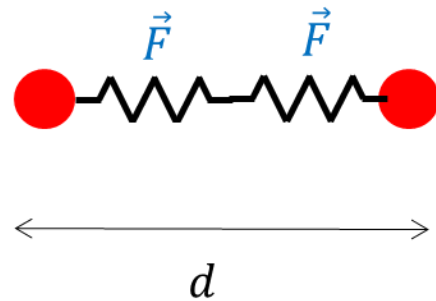


# Liaisons normalisées

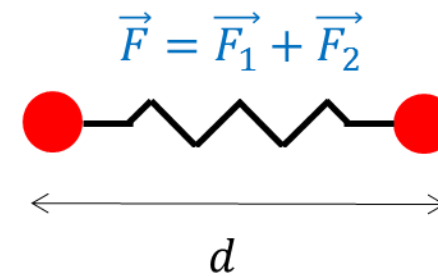
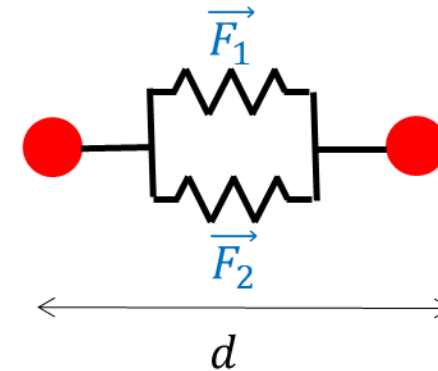
## Rappels sur les torseurs

**Remarque importante** : Analogie avec les combinaisons de ressorts :

Liaison série

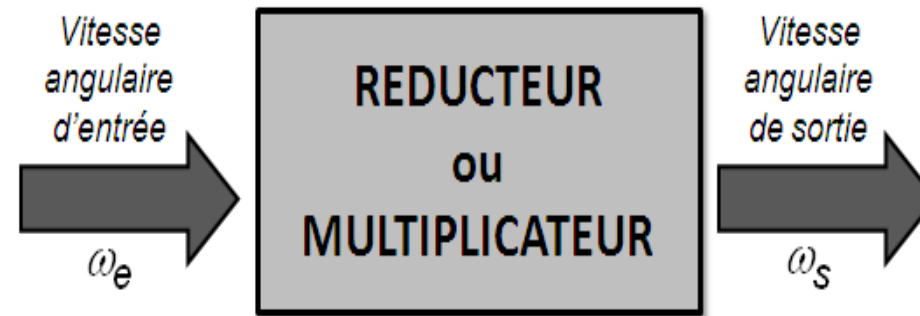


Liaison parallèle



# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

## Réducteurs et multiplicateurs de vitesse



### Transmetteurs :

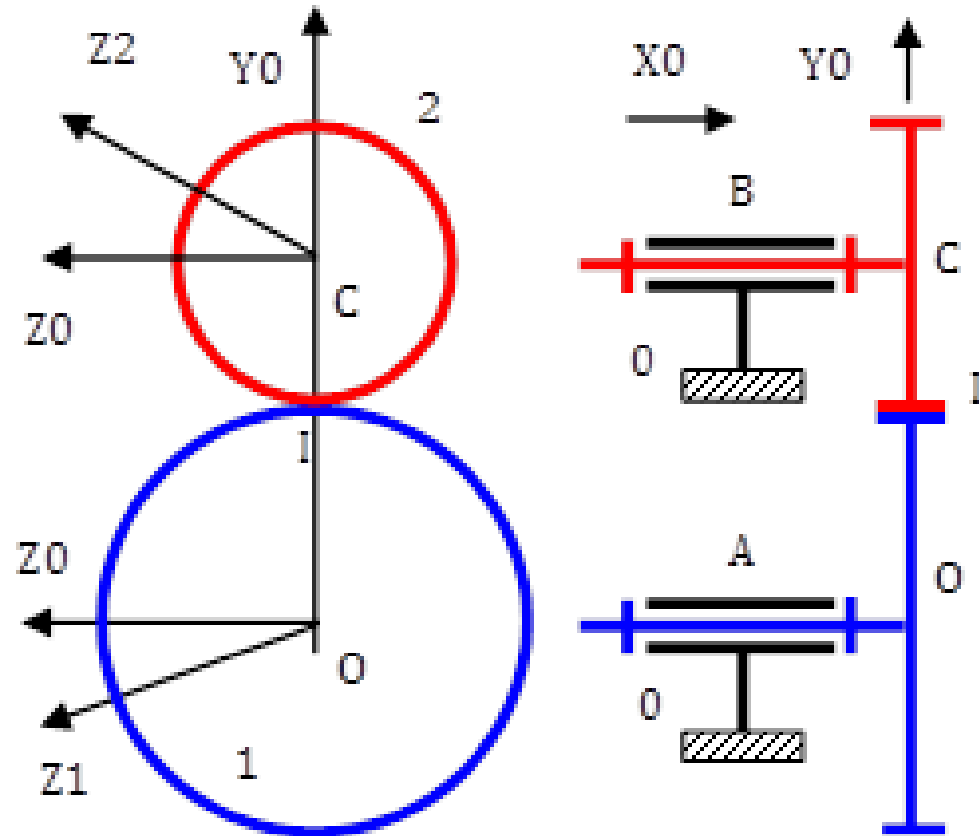
- Utilisant la transmission par adhérence : roue à friction (exemple : dynamo de vélo), dispositif poulie- courroie lisse (exemple : alternateur de voiture)
- Utilisant la transmission par obstacle : dispositif poulie-courroie crantée (exemple : courroie de distribution d'une voiture), dispositif pignon-chaîne (exemple : vélo, moto), engrenages (exemple : boîte de vitesse).

Remarque : Rapport de transmission d'un système :  $r = \frac{\omega_{e/0}}{\omega_{s/0}}$  (avec 0 le bâti).

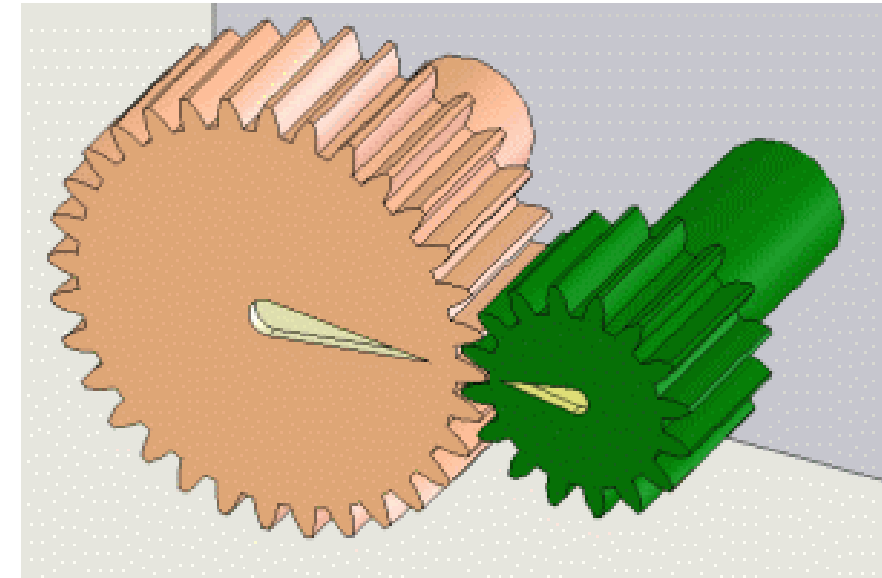
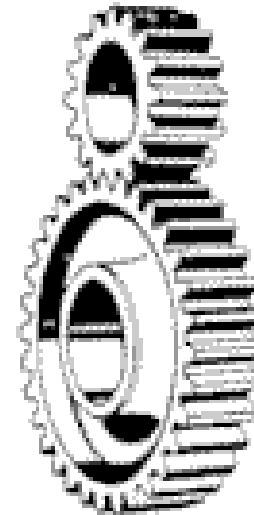


# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

## Application du RSG



$$\begin{aligned}\vec{OI} &= R_1 \vec{y}_0 \\ \vec{IC} &= R_2 \vec{y}_0\end{aligned}$$



# Engrènement : Modélisation du contact

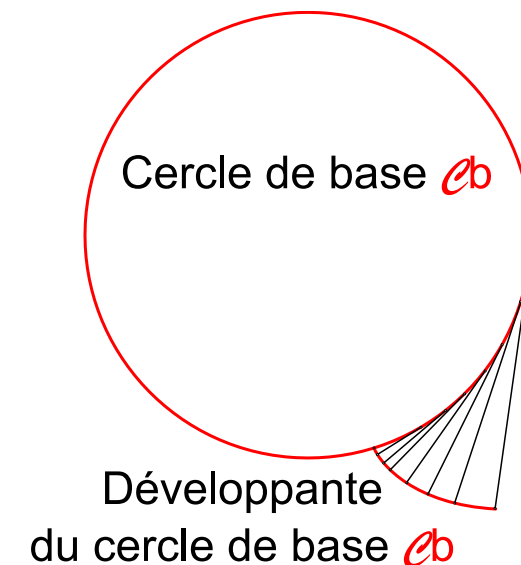
## Développante de cercle

Imaginez une bobine de fil. Marquez le fil d'un point et débobinez en maintenant la bobine fixe et le fil tendu : le point décrira une **développante de cercle**.

Définition : La développante du cercle est obtenue en faisant **rouler sans glisser une droite  $\Delta$**  marquée d'un point sur le cercle de base.

Droite graduée : unité : pas de base :  $p_b$ .

$\Delta$  roule sans glisser sur le cercle de base



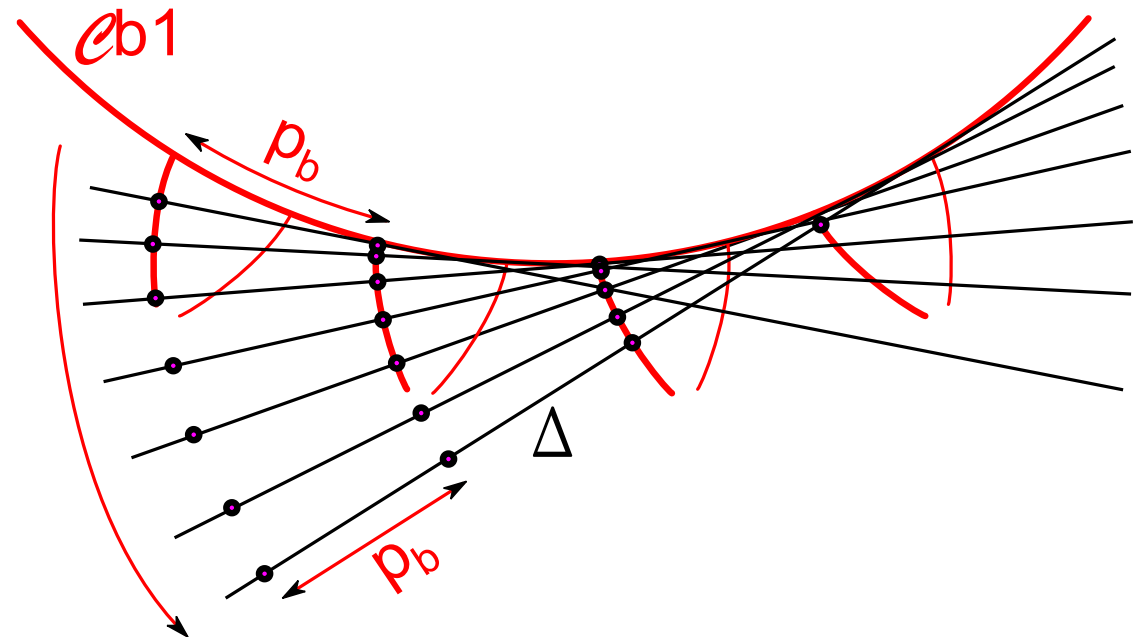
# Engrènement : Modélisation du contact

## Profil des dents

Par construction, **le profil de la dent est en permanence perpendiculaire à  $\Delta$** .

Pas de base  $p_b \rightarrow 2\pi R_b = Z \cdot p_b$        $Z = \underline{\text{nombre entier}}$  de dents.

Second profil  $\rightarrow$  Rouler sans glisser la droite  $\Delta$  dans l'autre sens après l'avoir décalée de  $p_b/2$ .



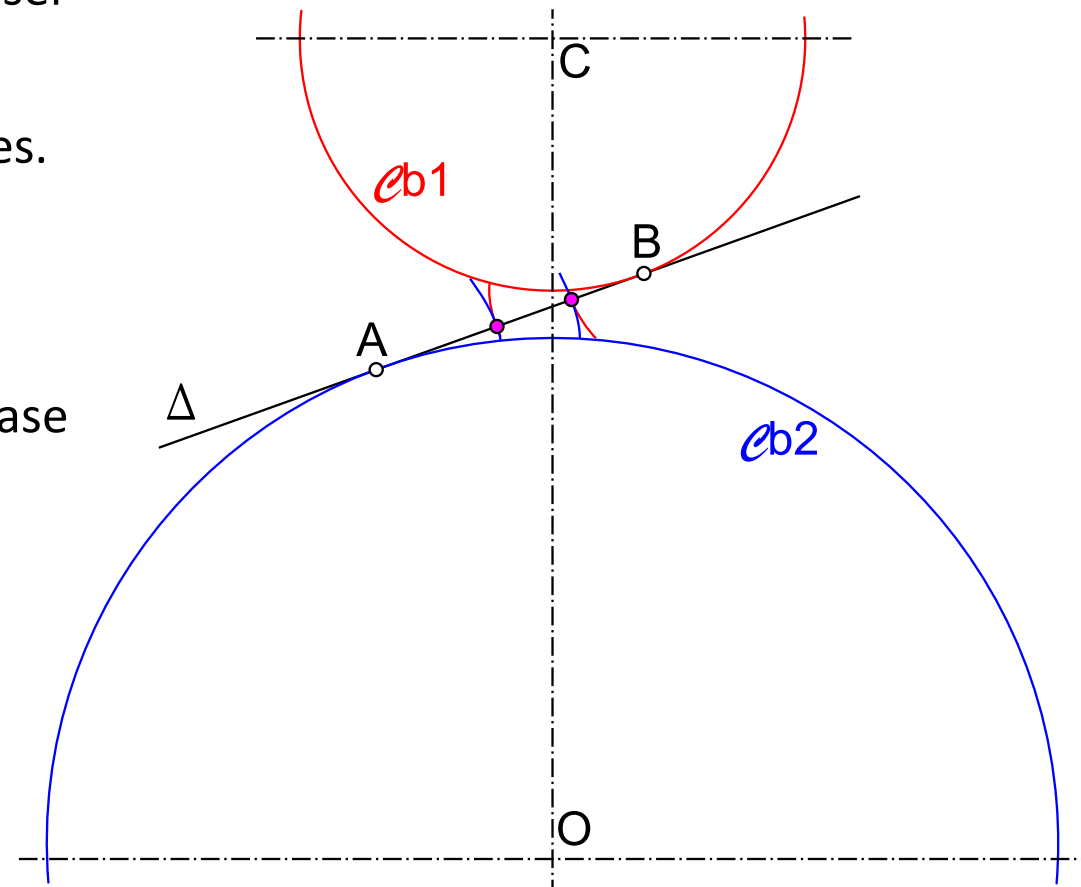
# Engrènement : Modélisation du contact

## Profil des dents

Deux cercles de base  $Cb1$  et  $Cb2$ ,  $\Delta$  roule sans glisser sur l'un des cercles de base, puis sur l'autre

→ Génération des développantes des deux cercles de bases.

Par construction, chaque développante d'un cercle de base est en contact avec une développante de l'autre.



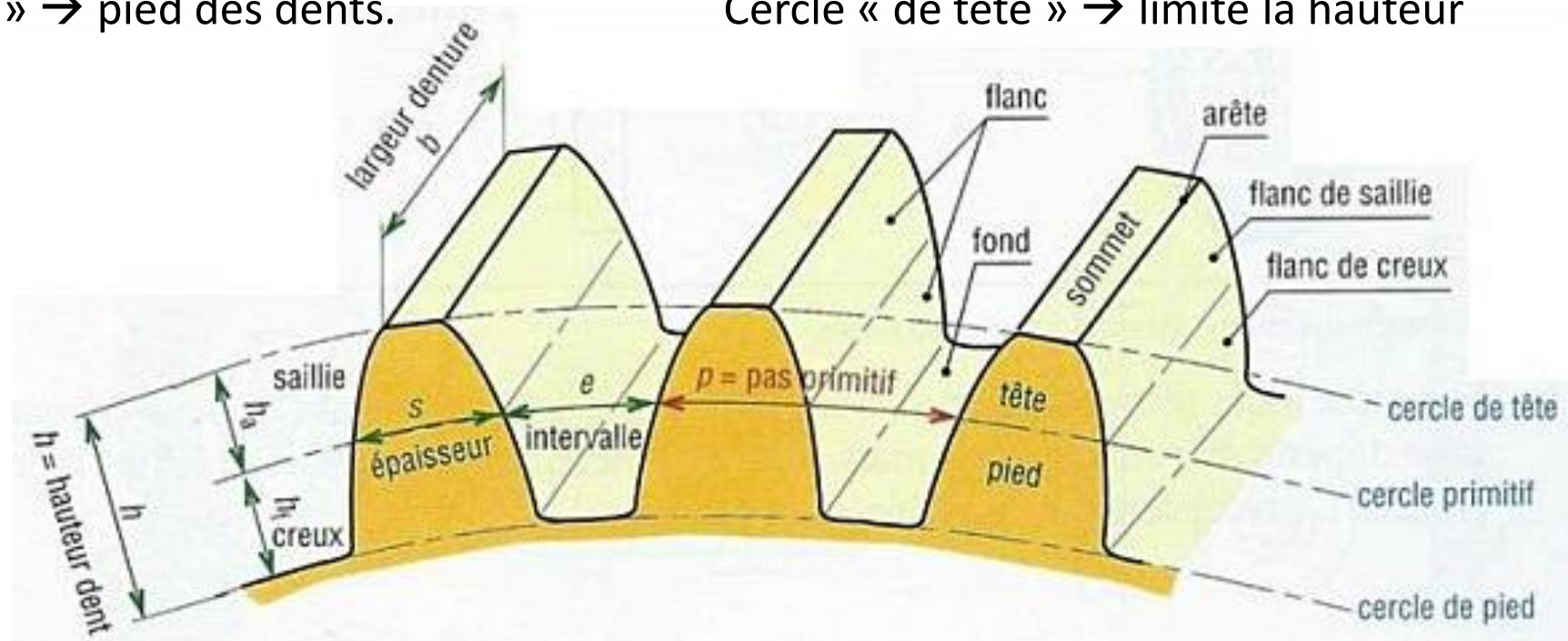
# Engrènement : Modélisation du contact

## Profil des dents

Les développantes  $\rightarrow$  matérialisent des roues dentées qui engrènent donc parfaitement et sans interruption du contact.

Cercle « de pied »  $\rightarrow$  pied des dents.

Cercle « de tête »  $\rightarrow$  limite la hauteur

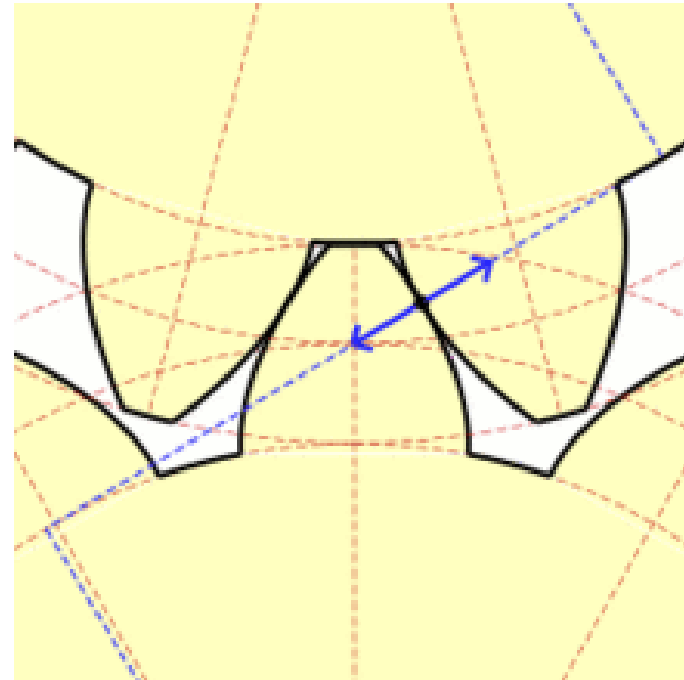
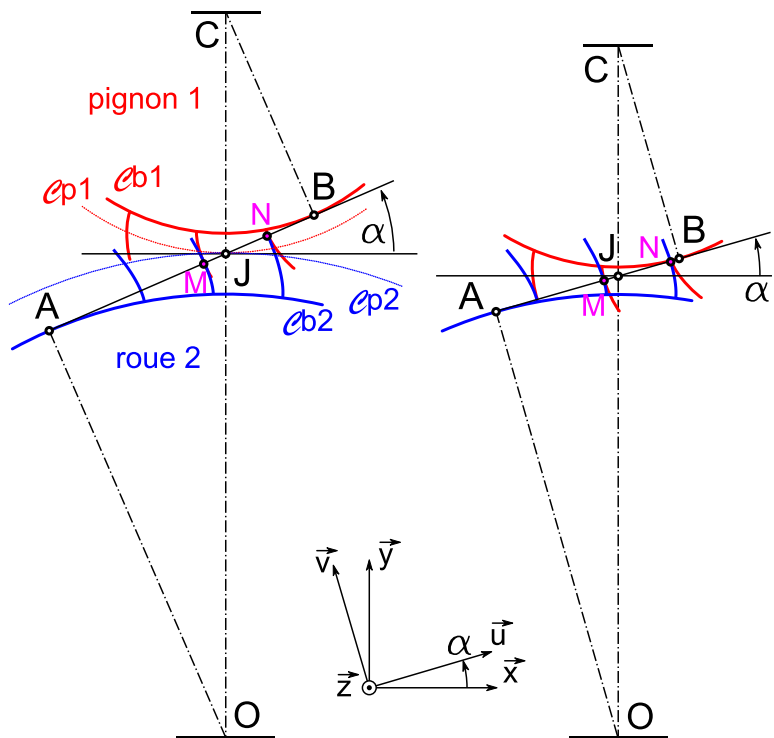


# Engrènement : Modélisation du contact

## Engrènement de deux roues dentées

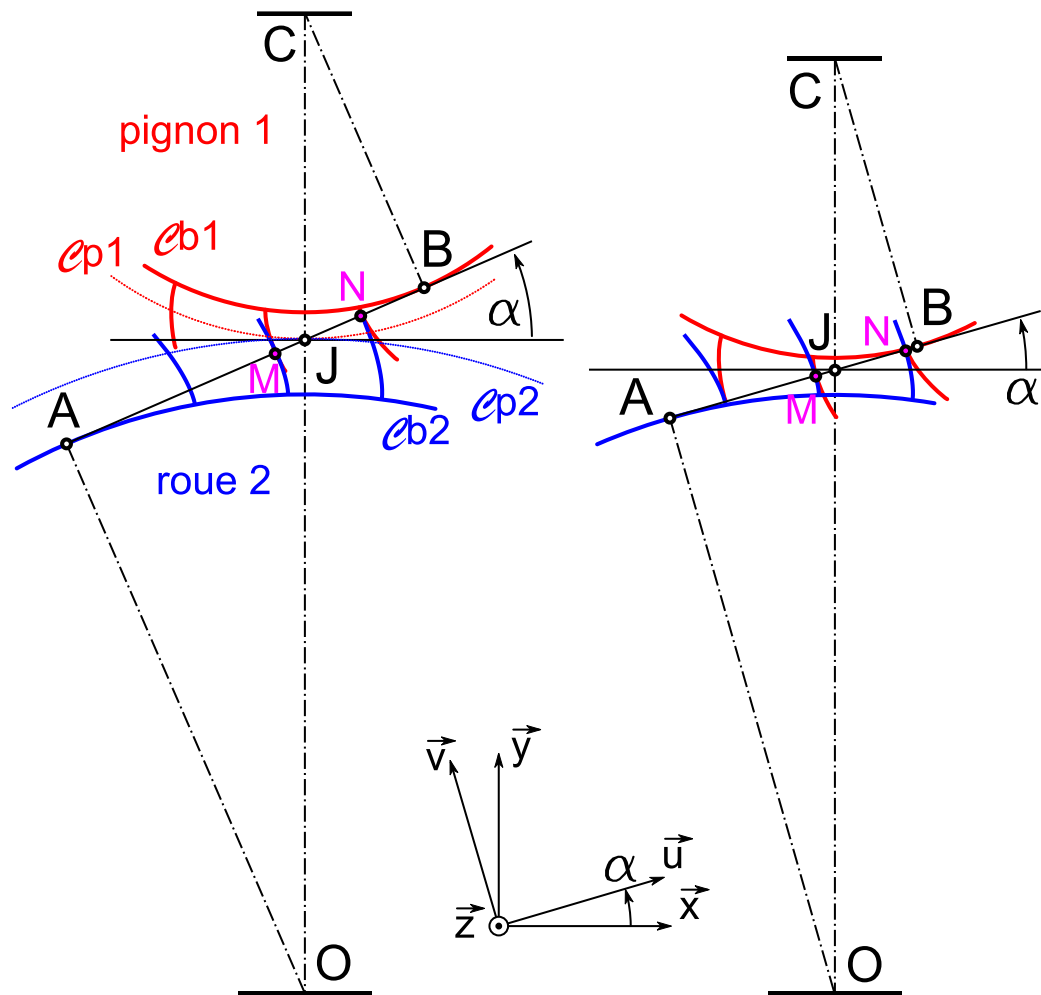
2 roues dentées  $\rightarrow$  Cercles de base  $Cb1$  et  $Cb2$ , de centres respectifs  $C$  et  $O$ .

La droite qui permet de définir la denture en développante  $\rightarrow$  tangente aux deux cercles en  $A$  et  $B$ .



# Engrènement : Modélisation du contact

## Engrènement de deux roues dentées



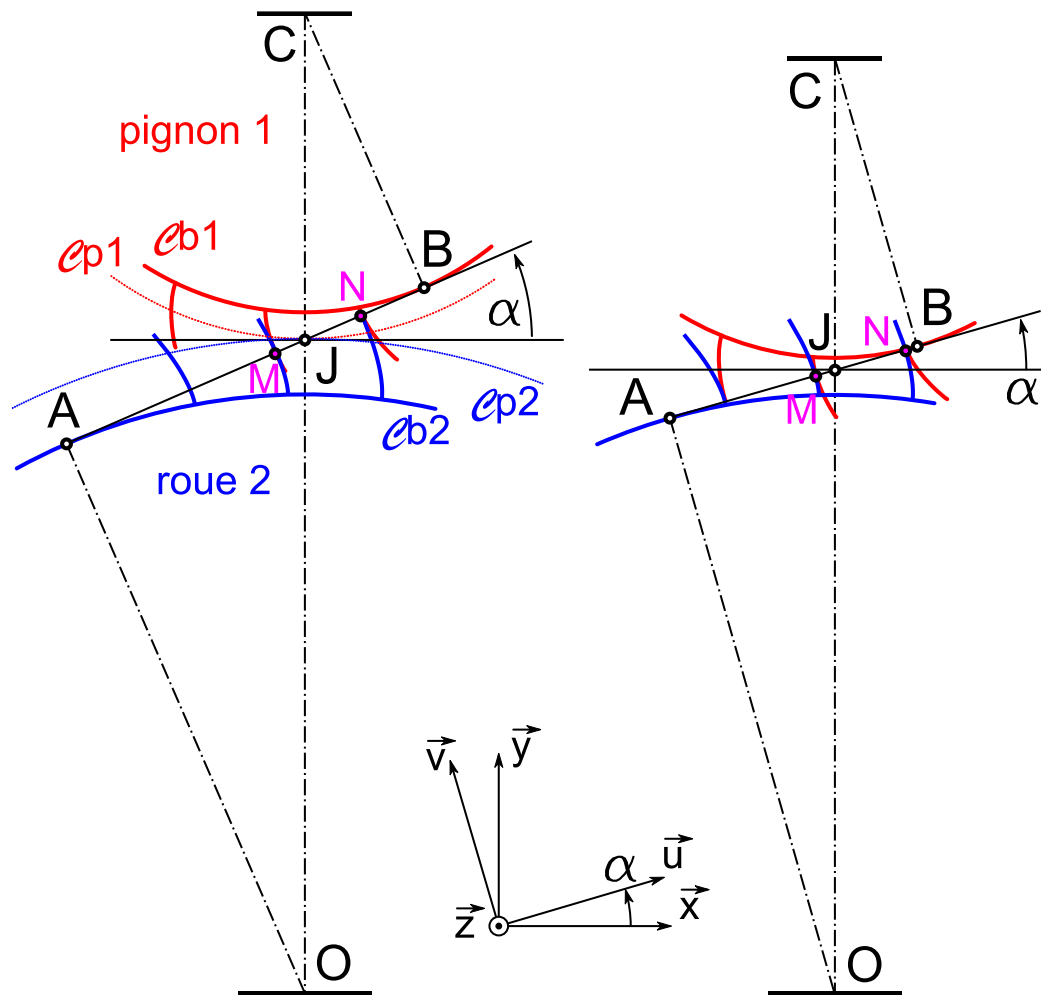
M et N  $\rightarrow$  2 points de contact entre deux dents successives.

M et N  $\rightarrow$  se déplacent sur la tangente (AB) normale au contact.

Normale  $\rightarrow$  **droite d'action** ou **ligne d'engrènement**.

# Engrènement : Modélisation du contact

## Engrènement de deux roues dentées



Angle de pression  $\alpha$  et le point  $J$  à l'intersection de  $(AB)$  et  $(OC)$ .

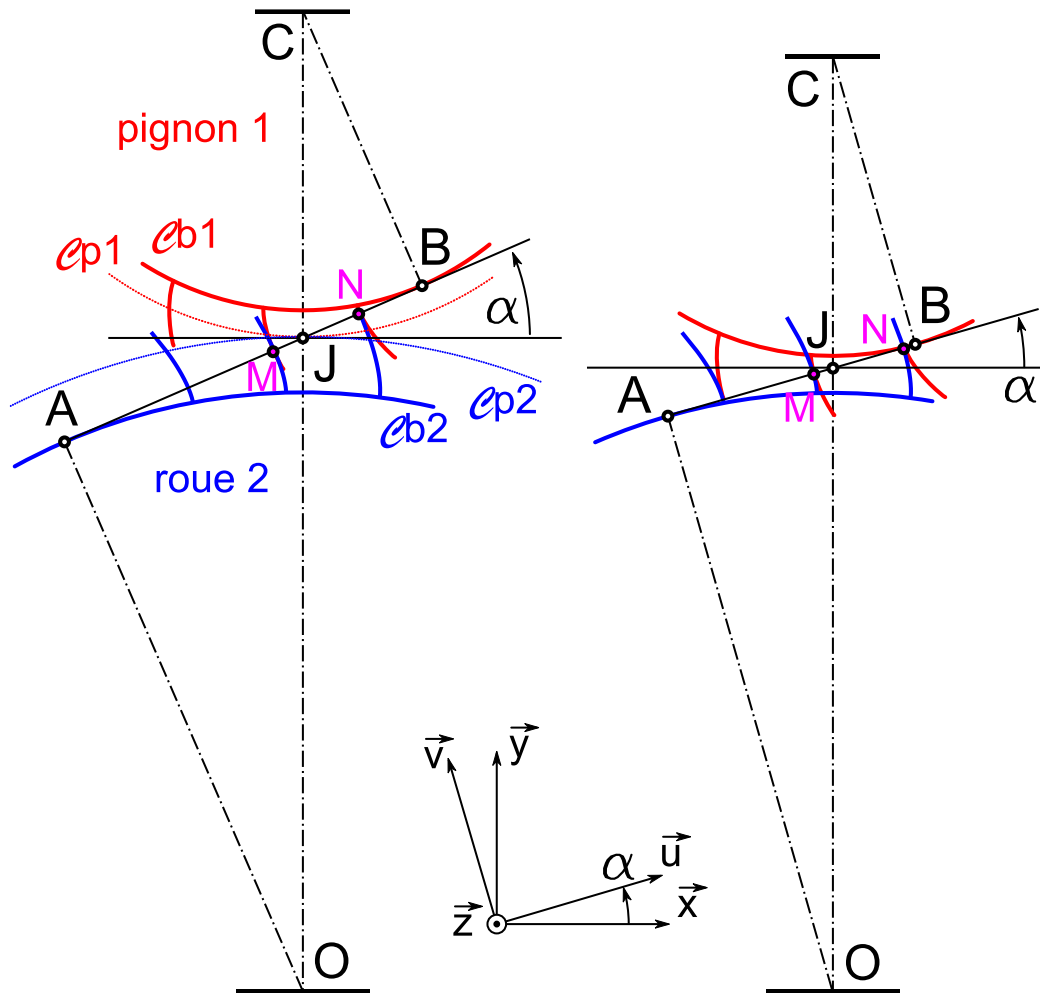
Point  $J \rightarrow$  pour chaque roue dentée  $\rightarrow$  **cercle primitif ( $Cp_i$ )** de **rayon primitif  $R_i$** .

Entraxe des roues :  $[OC] = R_1 + R_2$ .



# Engrènement : Modélisation du contact

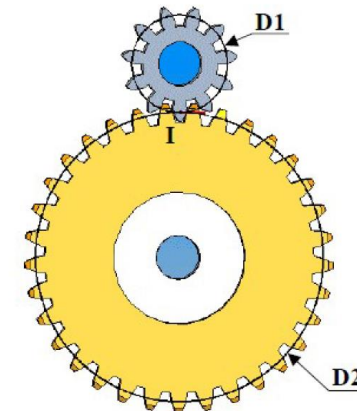
## Engrènement de deux roues dentées



Angle de pression standard est  $\alpha = 20^\circ$ .

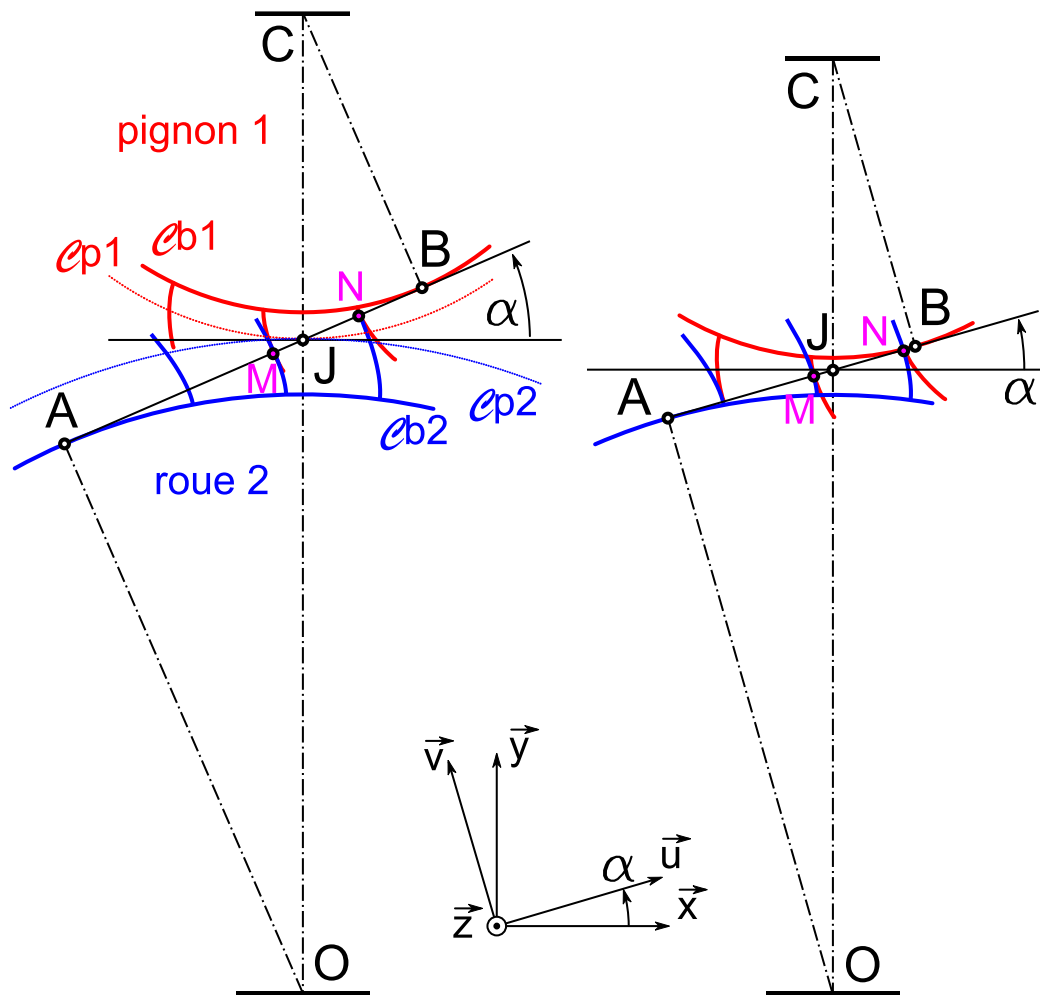
$$OC = R_1 + R_2 = \frac{R_{b1} + R_{b2}}{\cos(\alpha)}$$

**Dans la suite, nous n'utiliserons plus que les cercles primitifs.**



# Engrènement : Modélisation du contact

## Engrènement de deux roues dentées



Pas de fonctionnement :  $\frac{2\pi R}{Z} = pas$

Ou encore

$$D = m \cdot Z$$

avec  $m$  : le module de la roue dentée

# Engrènement : Modélisation du contact

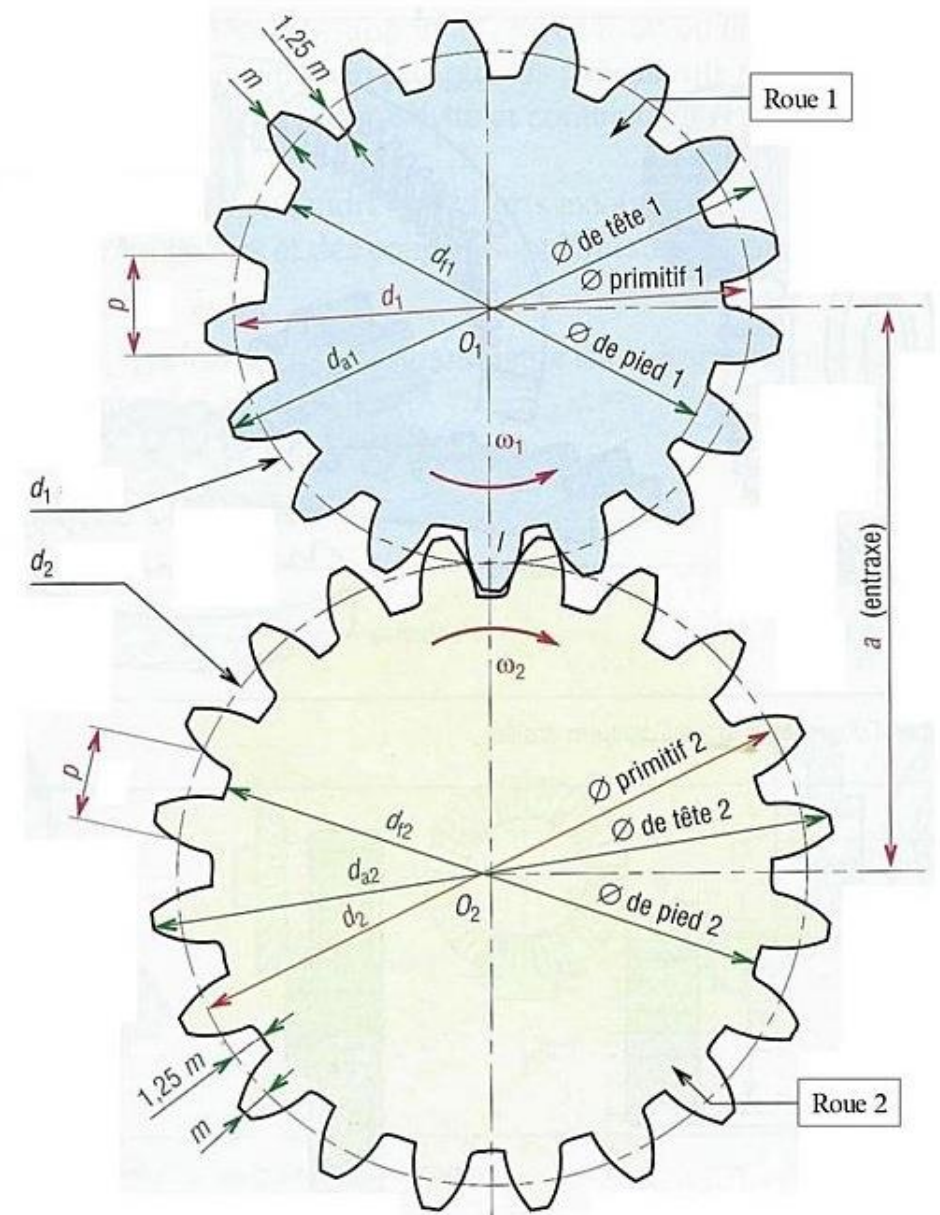
Engrènement de deux roues dentées

**Pour que deux roues dentées engrènent elles doivent avoir le même module.**

**Le rapport des rayons est égal au rapport des nombres de dents.**

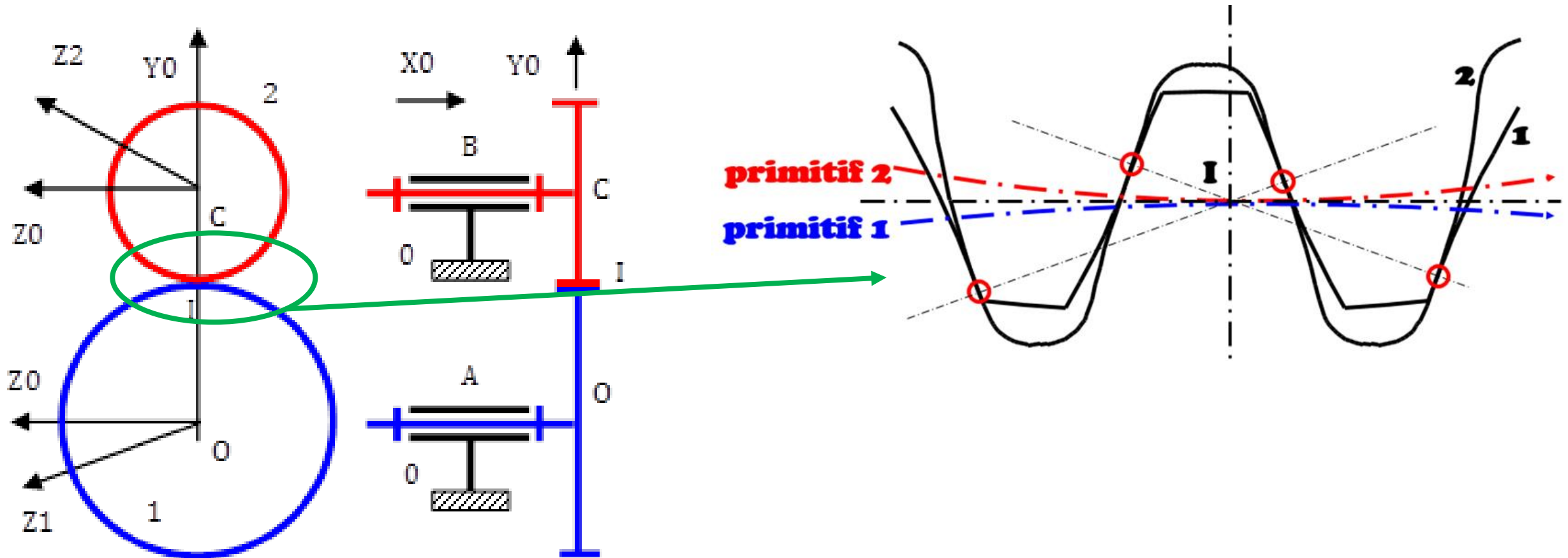
En effectuant le RSG en I, on obtient donc :

$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\frac{R_1}{R_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$



# Engrènement : Modélisation du contact

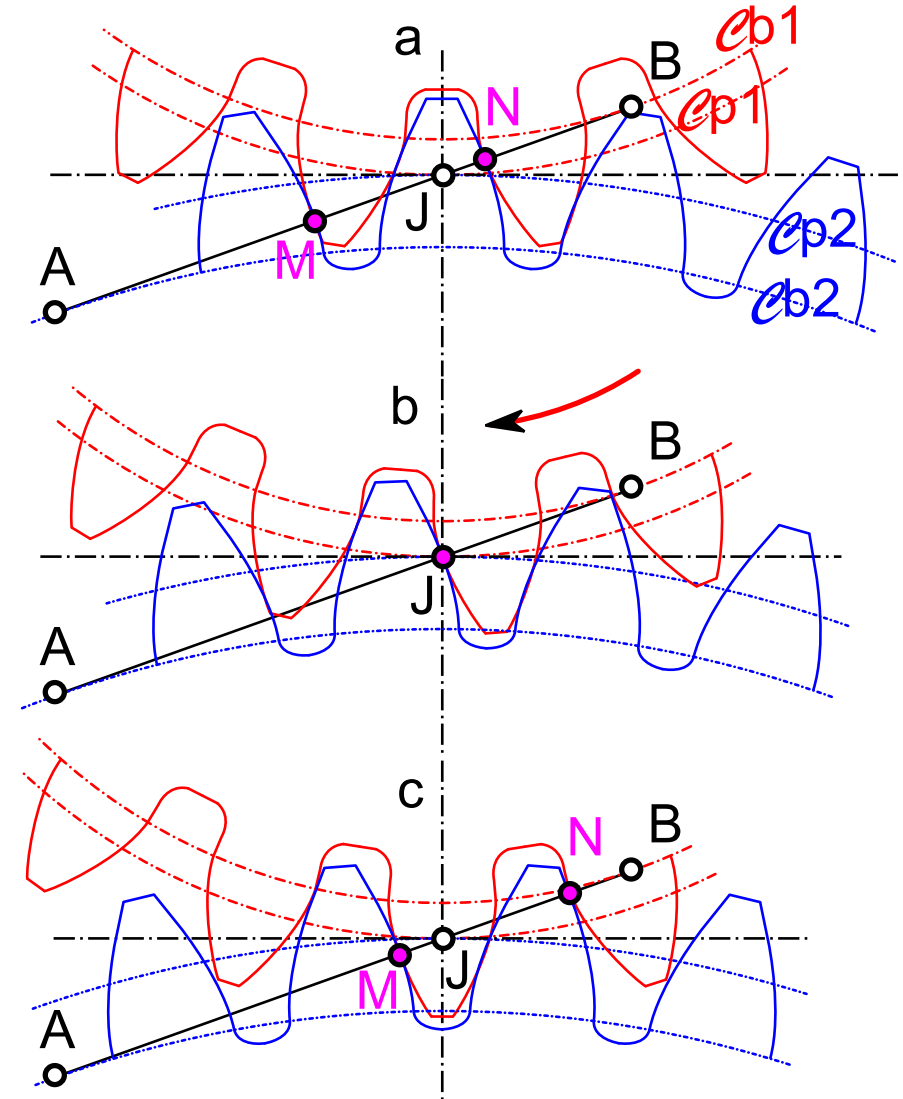
## Nombre et zones de contacts



# Engrènement : Modélisation du contact

## Nombre et zones de contacts

Plus de deux dents en contact en permanence  
(pas et module petit) → meilleure régularité de l'engrènement et moins de bruit.



# Engrènement : Modélisation du contact

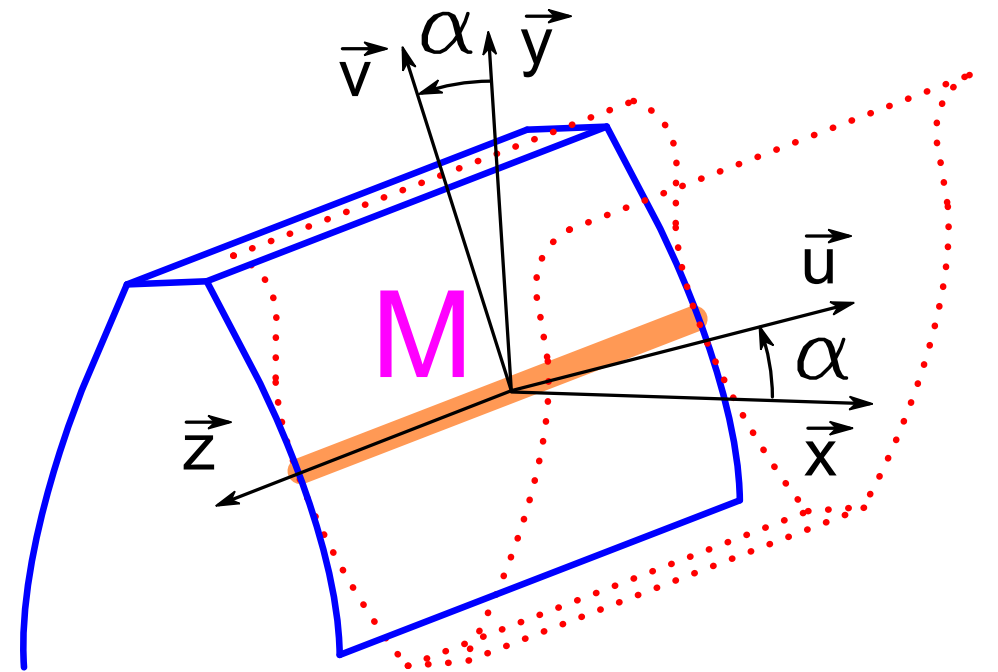
## Nombre et zones de contacts

Selon l'épaisseur de la denture  $\rightarrow$  Contact

$\rightarrow$  **liaison ponctuelle** (denture étroite)

$\rightarrow$  **liaison linéaire rectiligne** (denture large).

Plusieurs paires de dents en contacts  $\rightarrow$  liaison  
 $\rightarrow$  modélisée par autant de liaisons ponctuelles  
 (ou linéaires rectilignes), en parallèles.



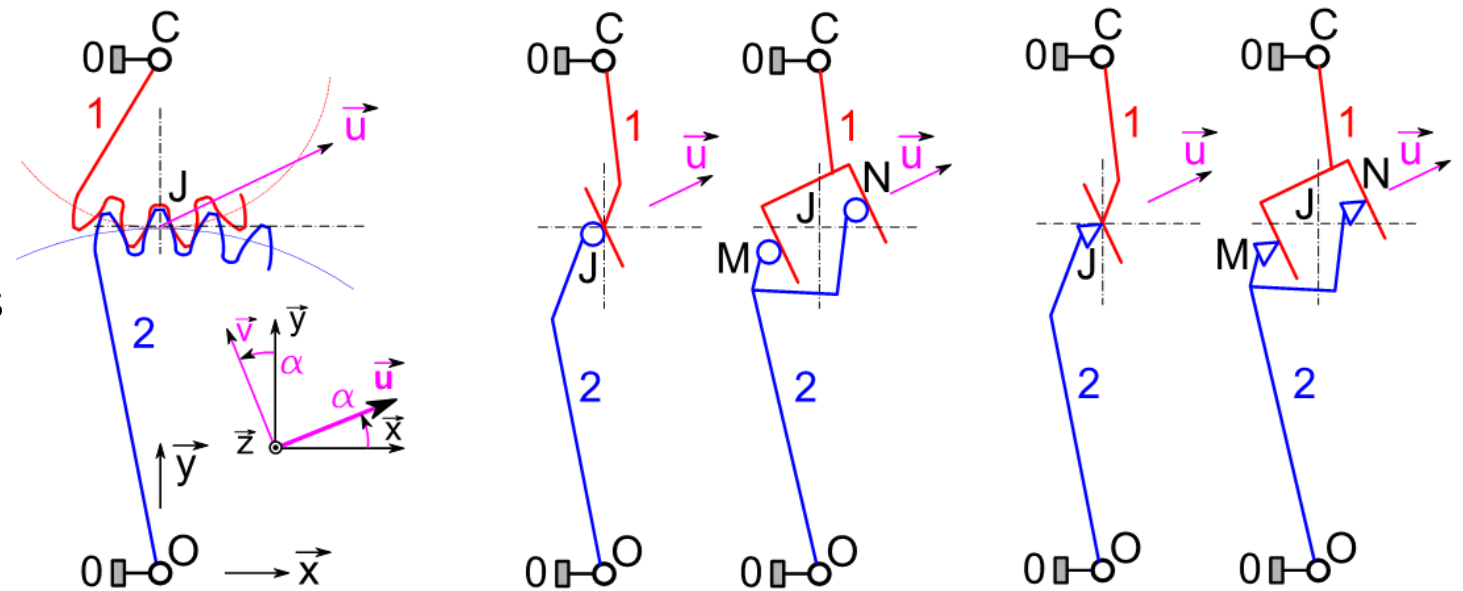
**Ces liaisons sont toutes localisées sur la même droite  $(J, \vec{u})$  et orientée par la normale  $\vec{u}$ .  
 C'est tout l'intérêt des dentures en développante.**

# Engrènement : Modélisation du contact

## Nombre et zones de contacts

Modélisation (+ largeur des dents) :

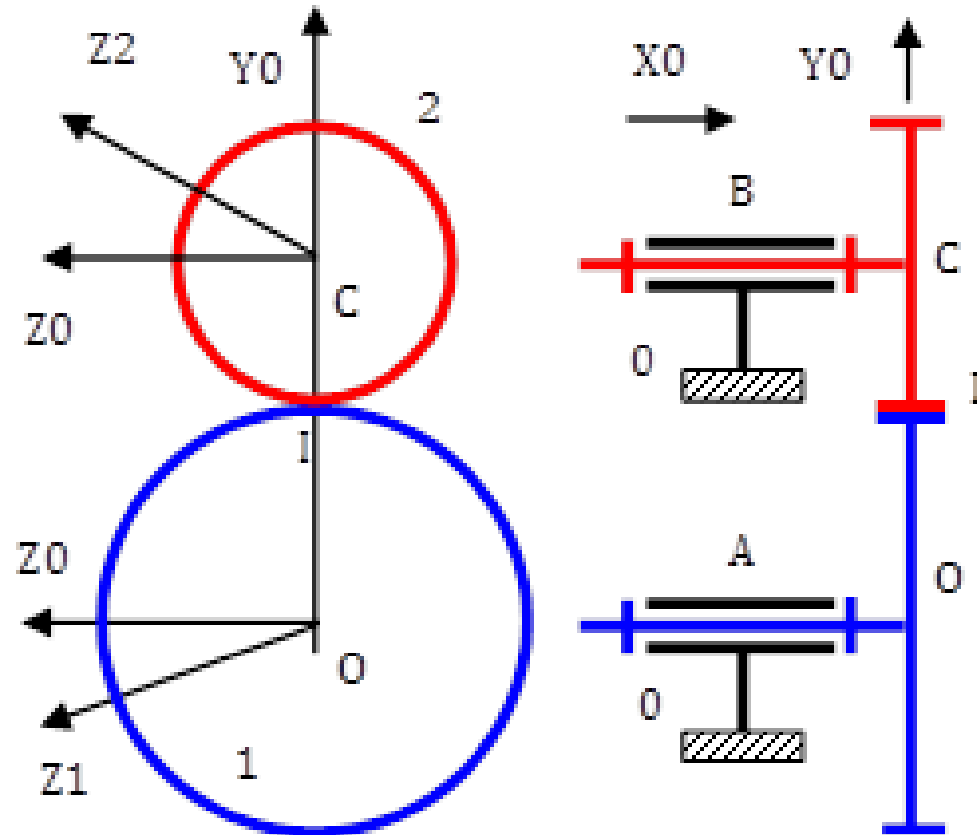
- une ou deux liaisons ponctuelles
- une ou deux liaisons linéaires rectilignes



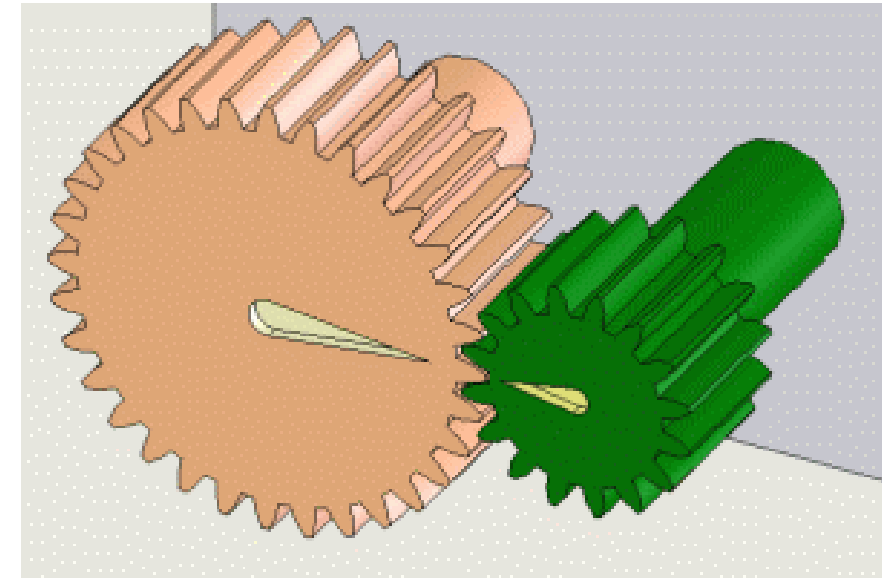
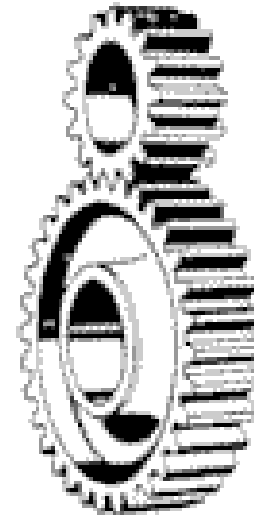
Normales des liaisons  $\rightarrow$  orientées selon le vecteur  $\vec{u}$ , incliné de l'angle de pression  $\alpha = 20^\circ$

# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

## Application du RSG



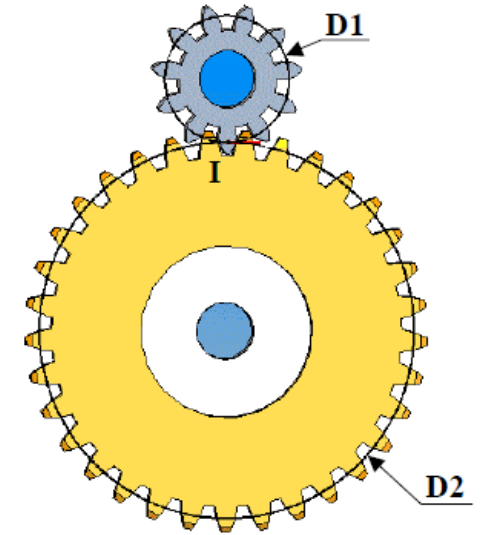
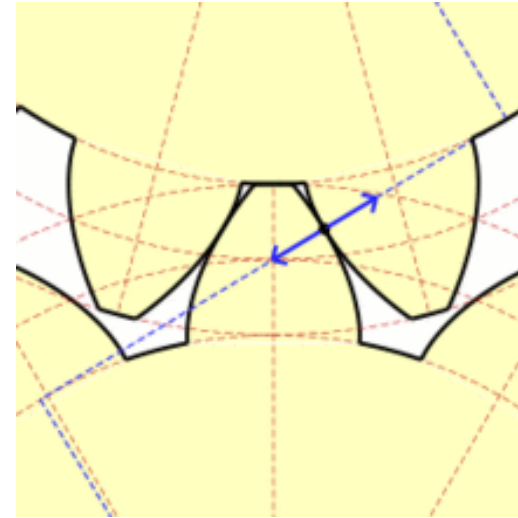
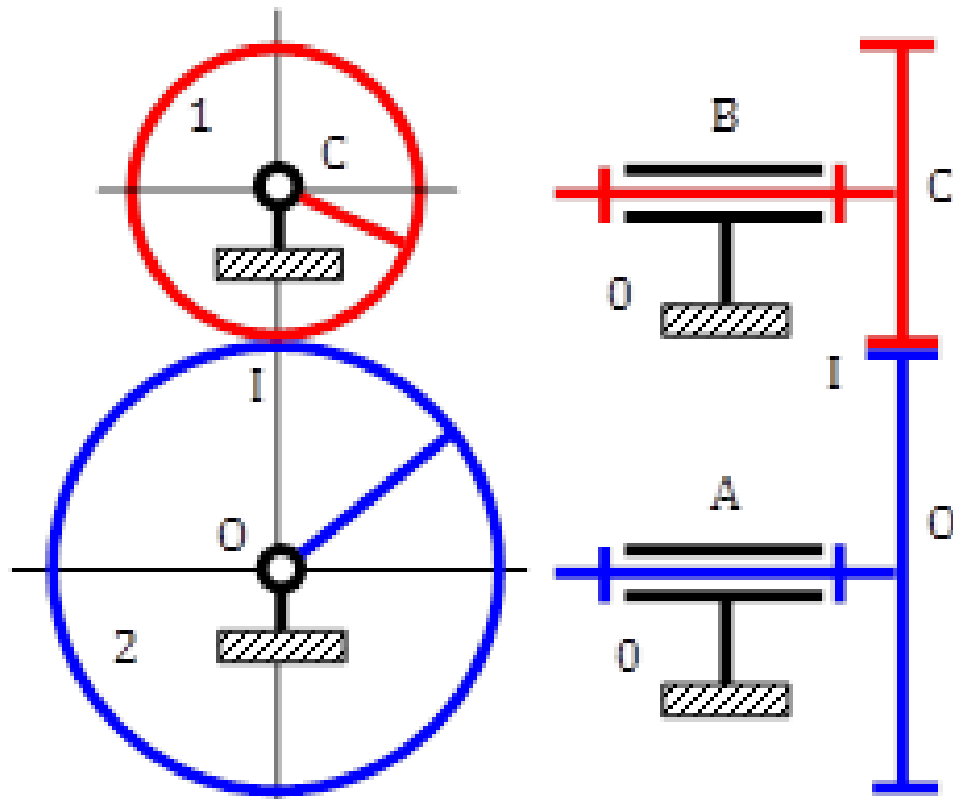
$$\begin{aligned}\vec{OI} &= R_1 \vec{y}_0 \\ \vec{IC} &= R_2 \vec{y}_0\end{aligned}$$





# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes parallèles  
Roues dentées avec contact extérieur

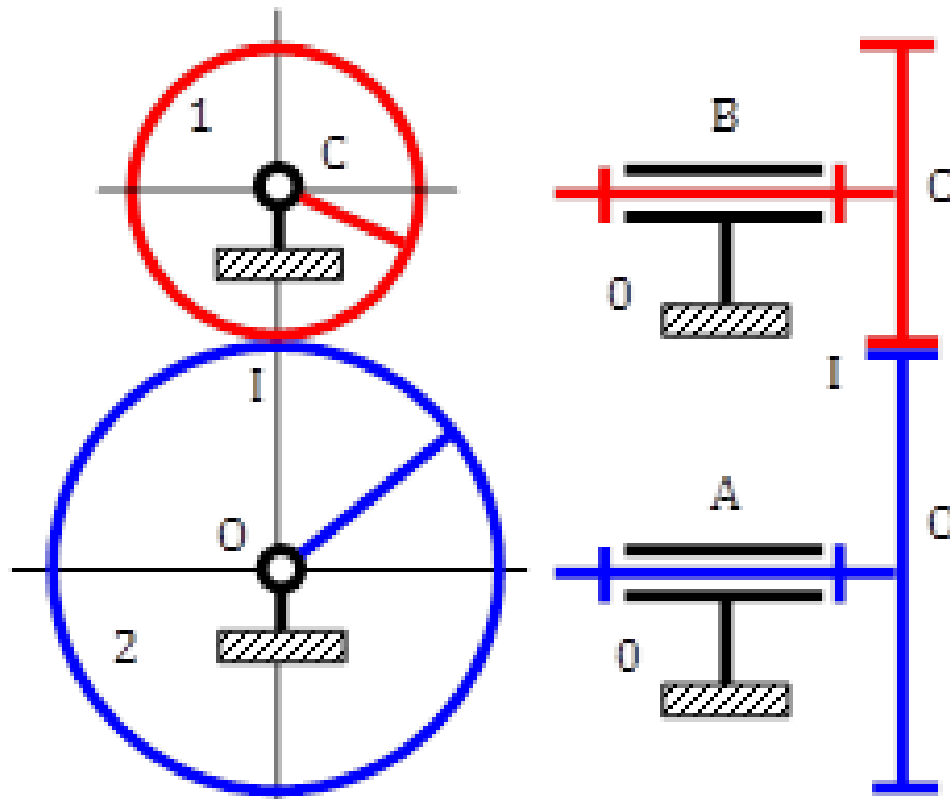


$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\frac{R_1}{R_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

$$D = m \cdot Z$$

# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes parallèles  
Roues dentées avec contact extérieur



- ✓ Transmission → mouvement de rotation entre des arbres à axes parallèles
- ✓ Plus simples
- ✓ Plus économiques

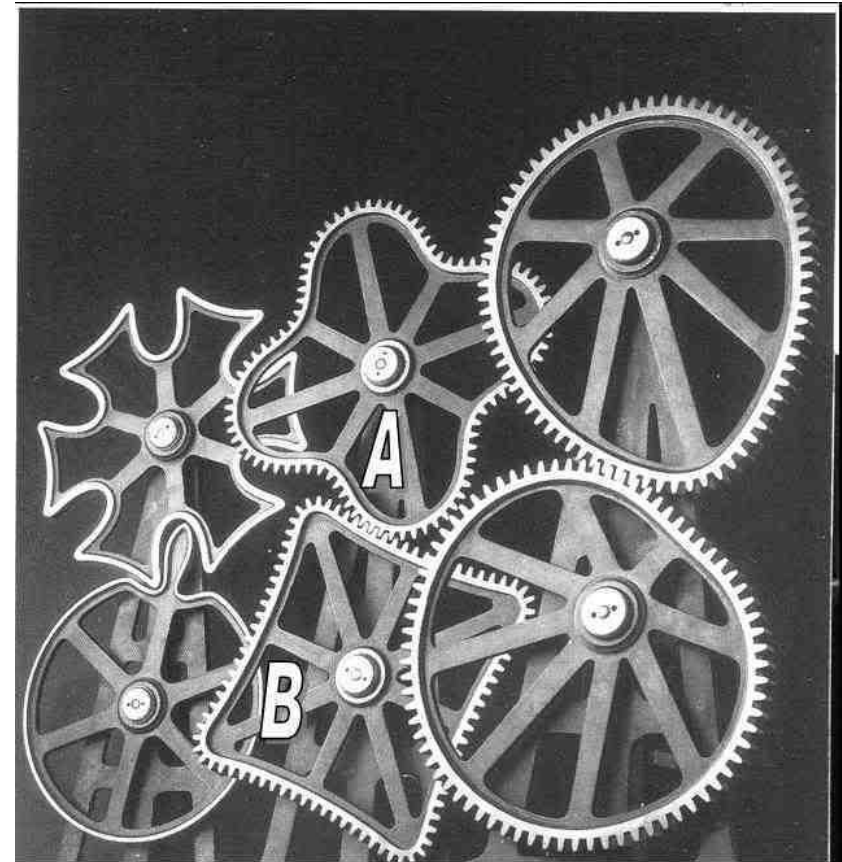
- Déplacements axiaux (dents parallèles aux axes de rotation)
- Bruyants

(Denture hélicoïdale)

- ✓ Engrènement plus progressif et plus continu → Silencieux + Effort transmis plus important
- Efforts axiaux

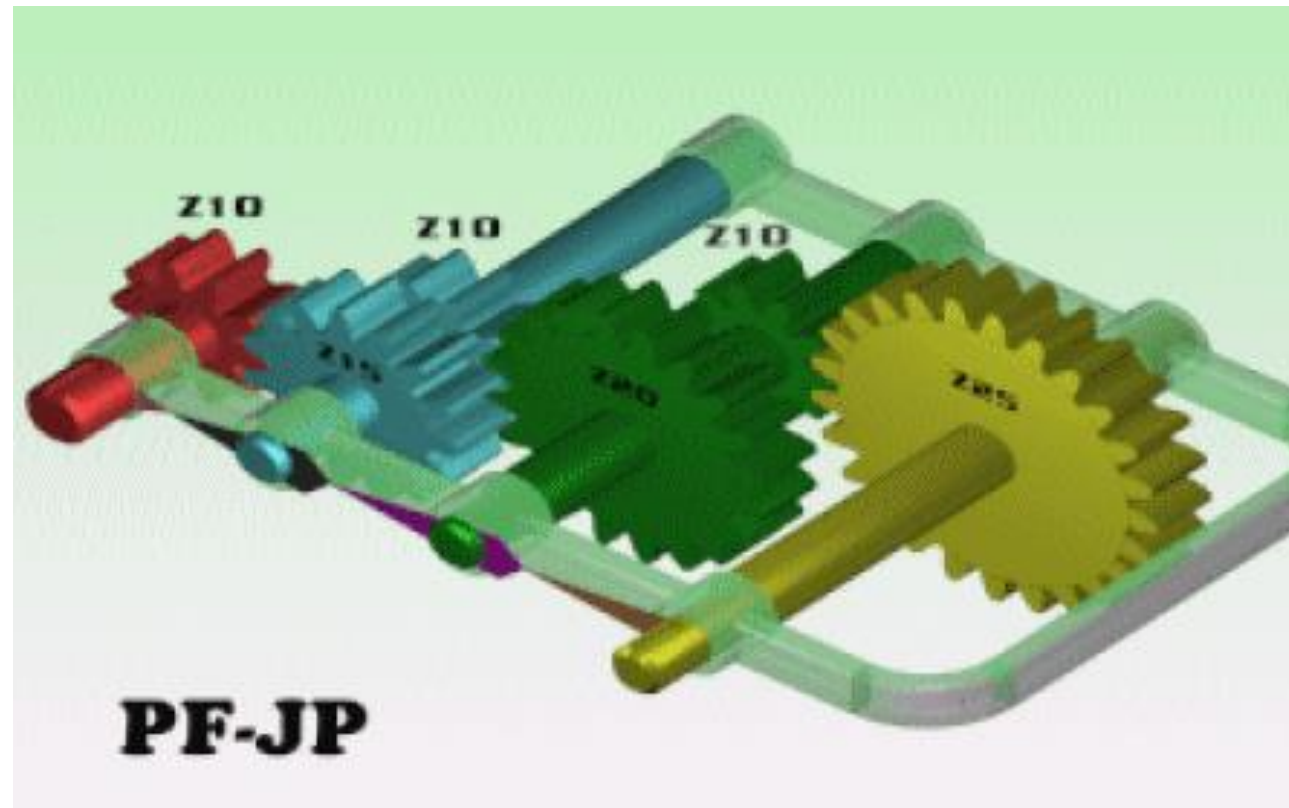
# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes parallèles  
Roues dentées avec contact extérieur



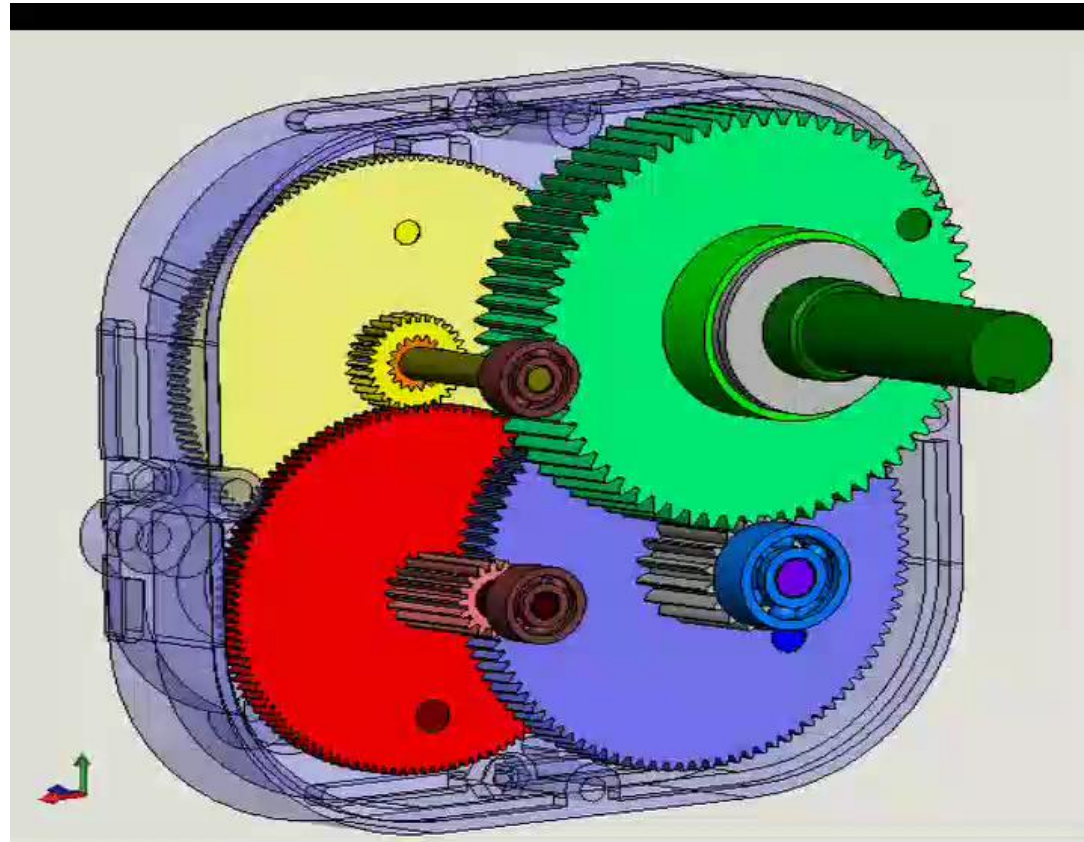
# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes parallèles  
Roues dentées avec contact extérieur



# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

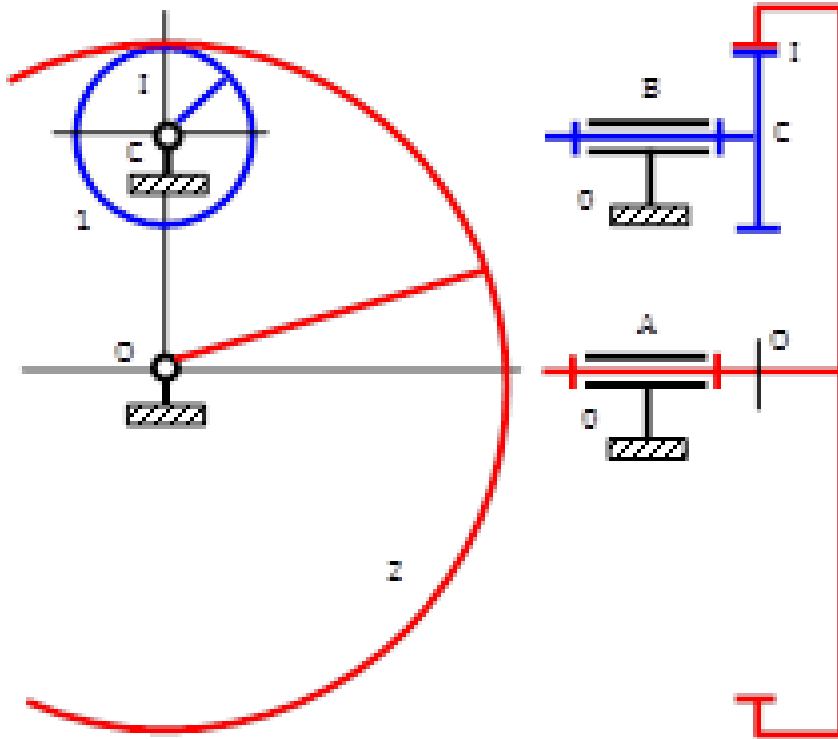
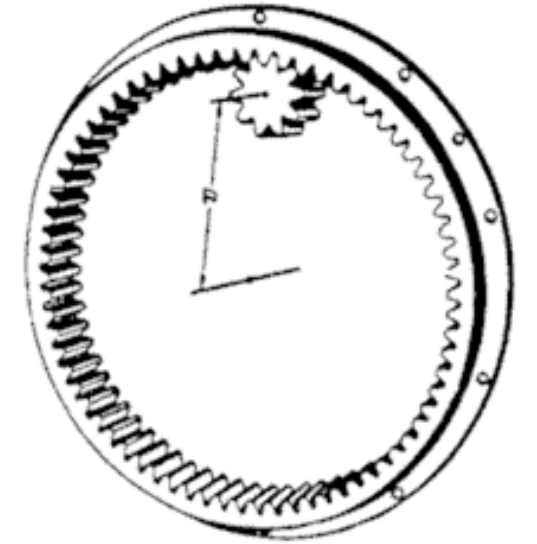
Engrenages à axes parallèles  
Roues dentées avec contact extérieur



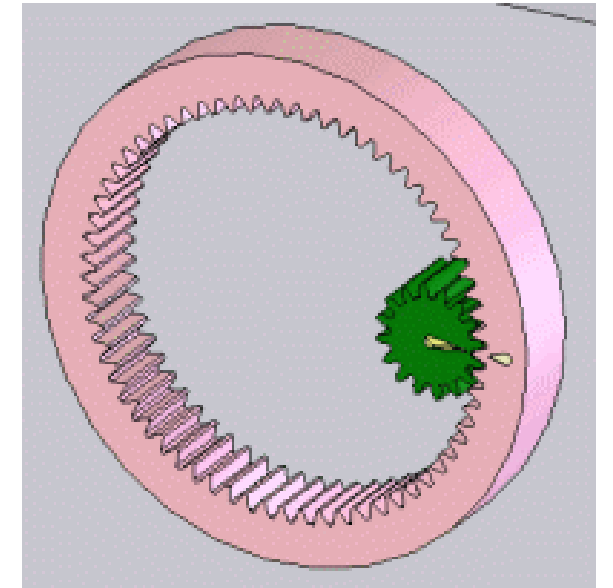


# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes parallèles  
Roues dentées avec contact intérieur

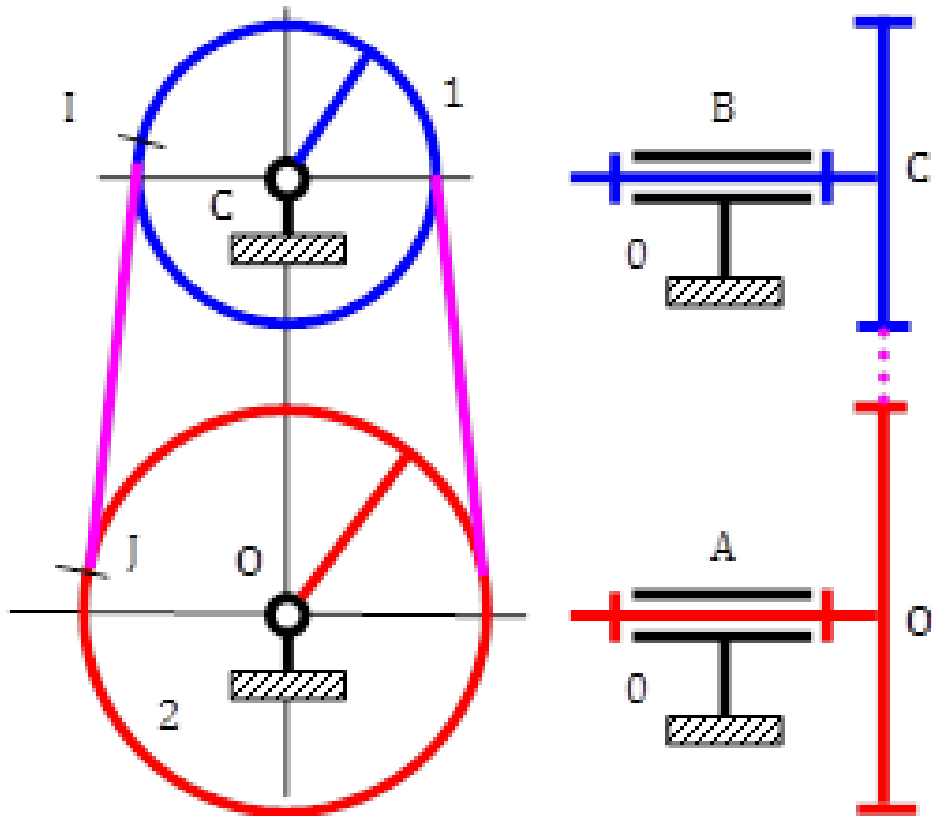


$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

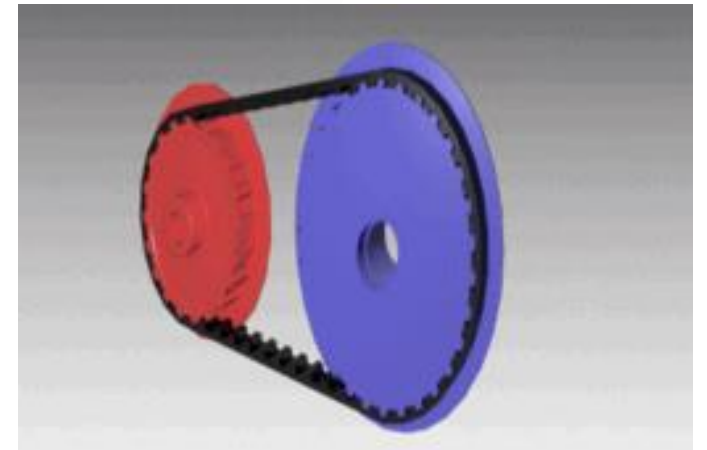


# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes parallèles  
Poulie courroie

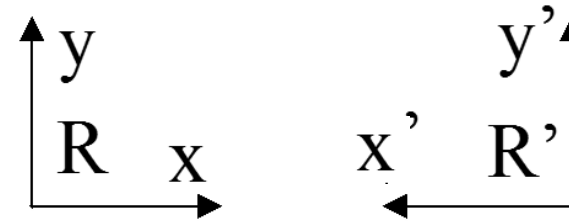
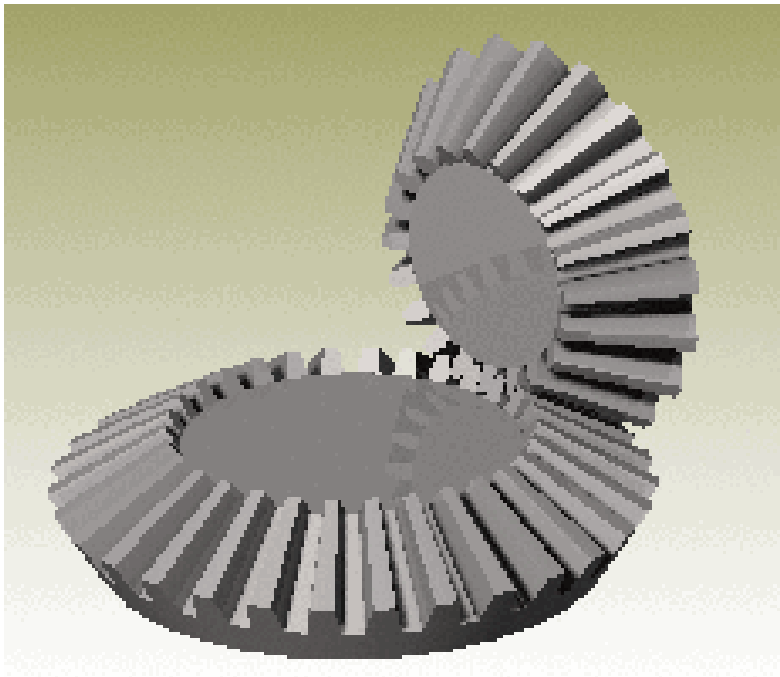


$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{R_1}{R_2}$$



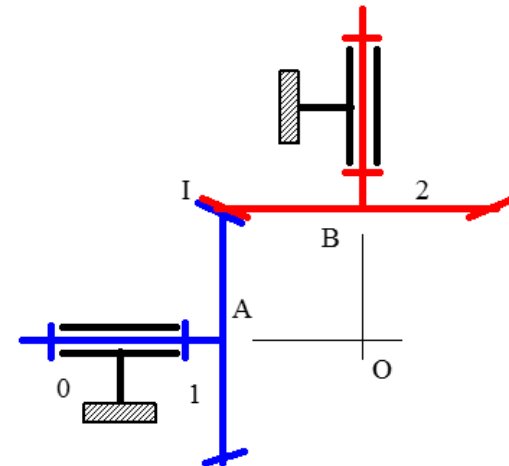
# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes non parallèles  
Roues dentées avec contact extérieur



$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$$

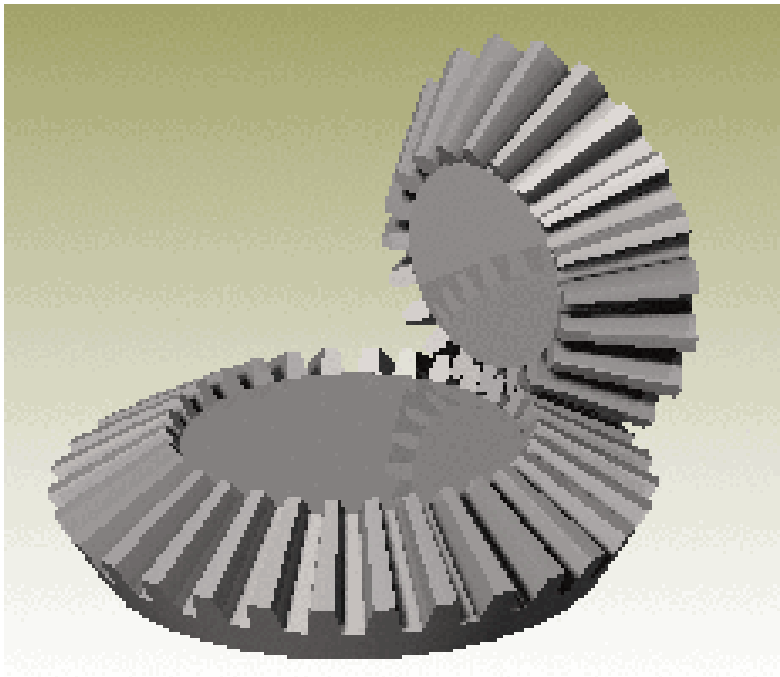
$$\frac{\omega'_{20}}{\omega'_{10}} = -\frac{R_1}{R_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$





# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes non parallèles  
Roues dentées avec contact extérieur



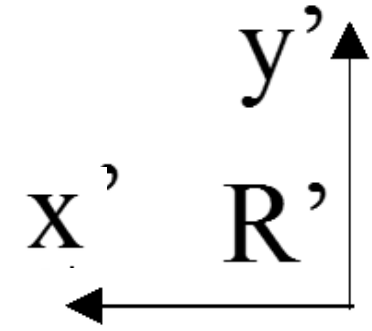
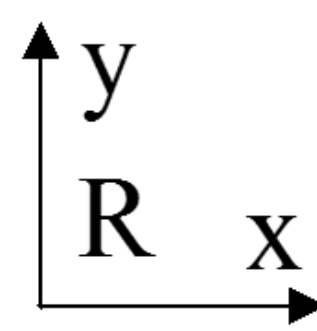
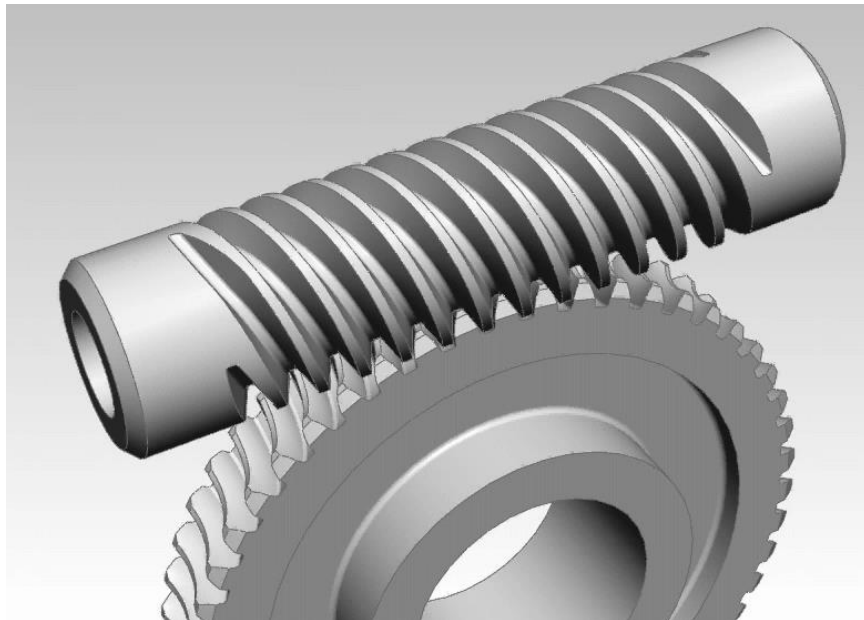
- ✓ Transmission de mouvement de rotation entre des arbres à axes concourants perpendiculaires ou non.
- Arbres sont en porte à faux
- Efforts axiaux
- Sommets des cônes doivent coïncider

# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes non parallèles  
Roue/vis

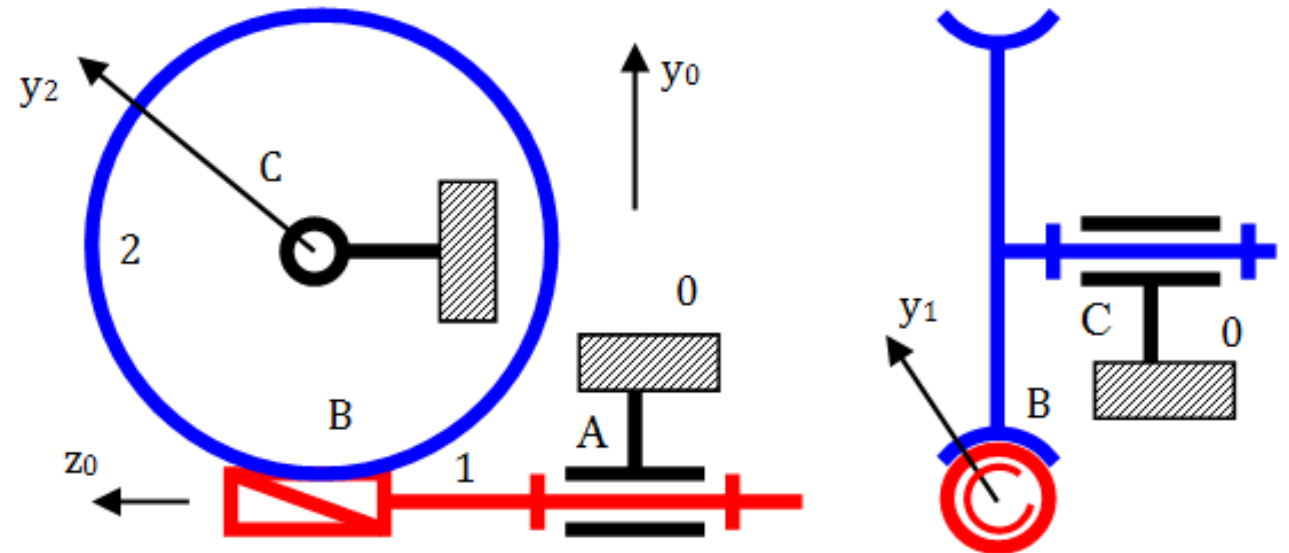
Vis 1 :  $Z_1$  filets

Roue 2 :  $Z_2$  dents



$$\frac{\omega_{20}}{\omega_{10}} = -\frac{Z_1}{Z_2}$$

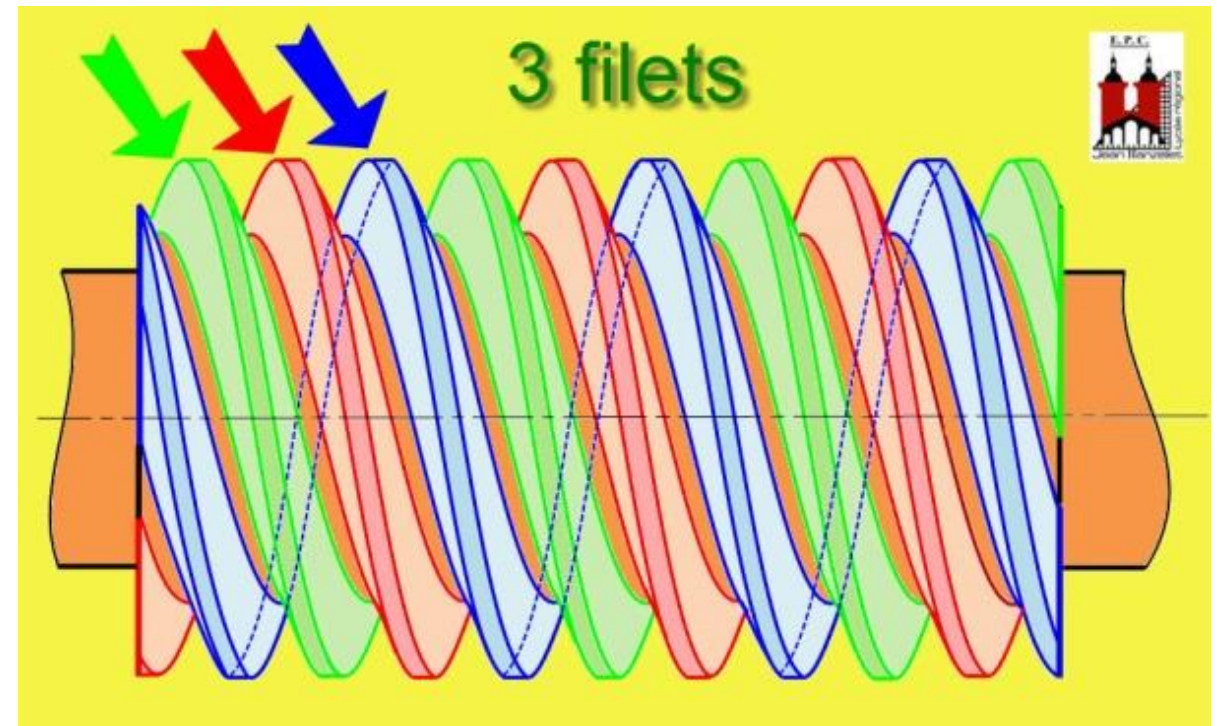
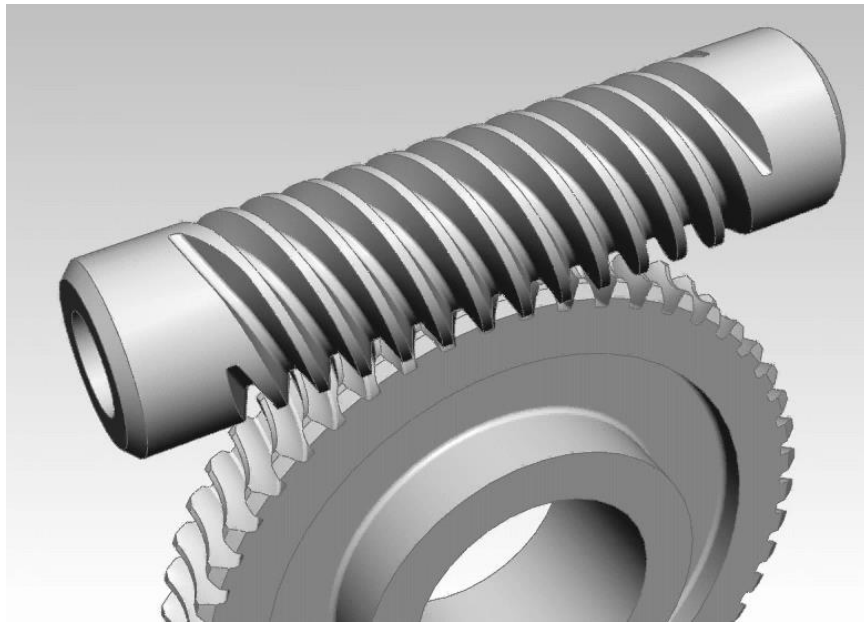
$$\frac{\omega'_{20}}{\omega'_{10}} = \frac{Z_1}{Z_2}$$



**ATTENTION : Pas de rapport de rayon**

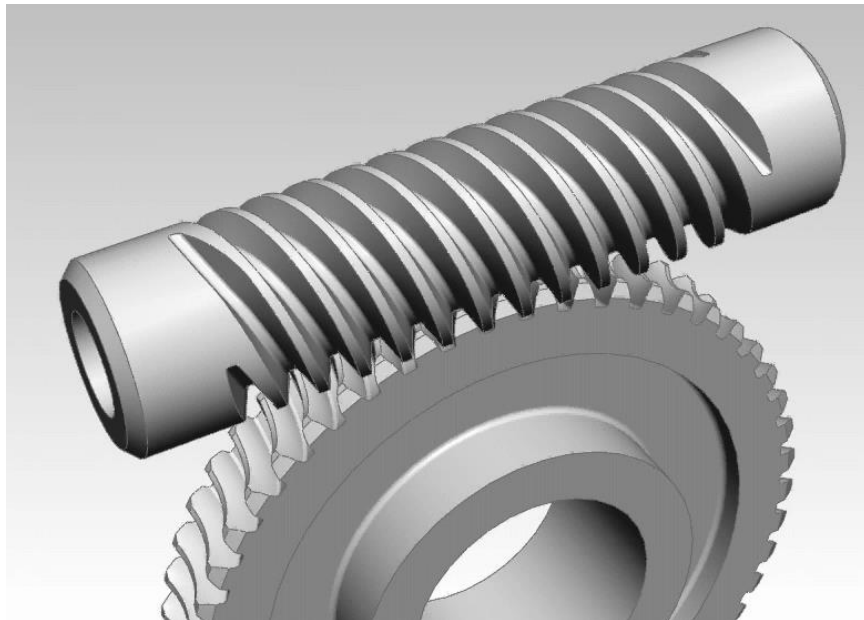
# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes non parallèles  
Roue/vis



# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

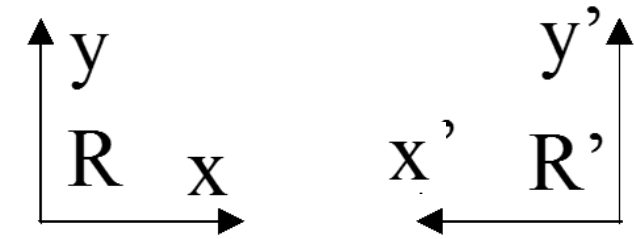
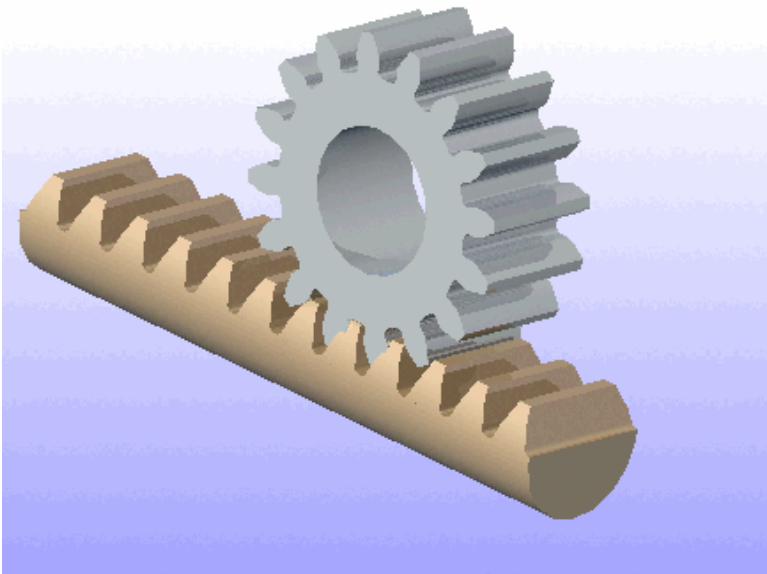
## Engrenages à axes non parallèles Roue/vis



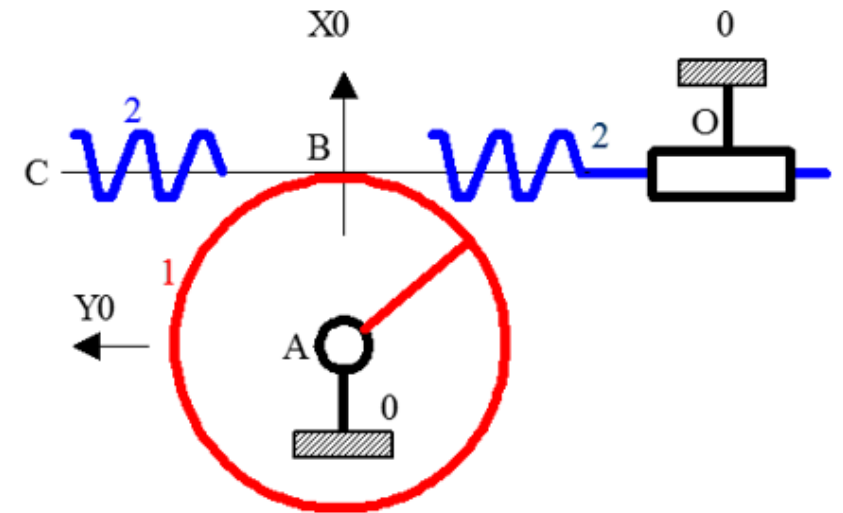
- ✓ Transmission entre arbres à axes non concourants
- ✓ Irréversibilité possible → sécurité anti-retour
- ✓ Grand rapport de réduction (entre 5 et 150)
  
- Beaucoup de glissement entre les dentures → usure
- Rendement faible (60%)
- Vis → supporte un effort axial important

# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Engrenages à axes non parallèles  
Pignon crémaillère



$$V_{20} = -R_1 \cdot \omega_{10} \quad V'_{20} = R_1 \cdot \omega'_{10}$$



**ATTENTION : Pas de rapport de nombre de dents !!**

# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

## Trains épicycloïdaux

### Trains simples :

- Arbres d'entrée et de sortie → ~~coaxiaux~~
- Rapport de réduction ou multiplication d'un seul couple de roues dentées → limité à 7 (raisons de géométrie).
- Trains simples à plusieurs étages → encombrants et lourds

### Engrenages à roue et vis sans fin :

- Arbres d'entrée et de sortie → ~~coaxiaux~~
- Rapport de réduction ou multiplication → 150
- rendement  $\leq 60\%$

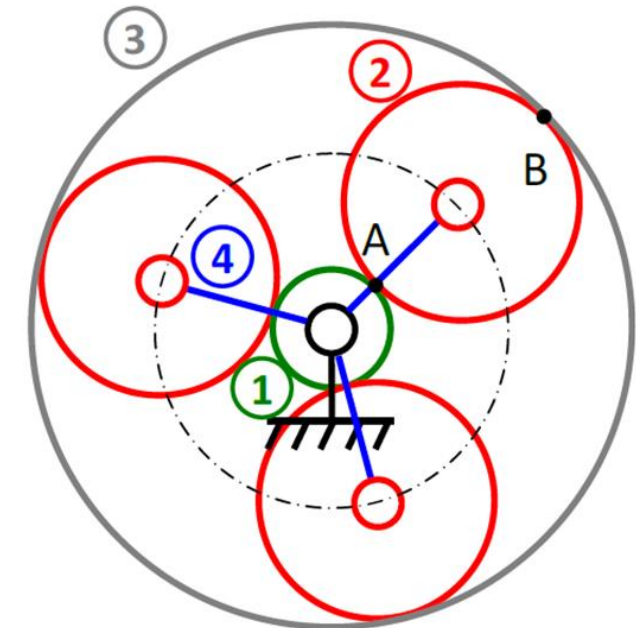
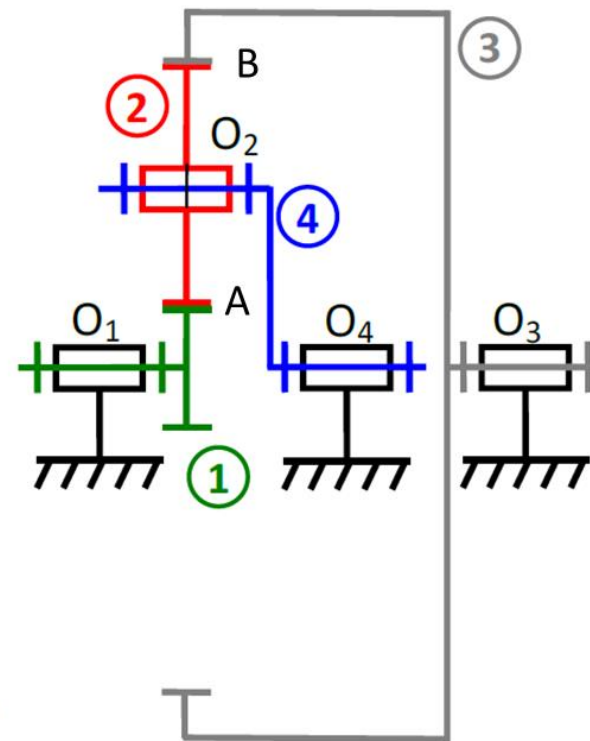
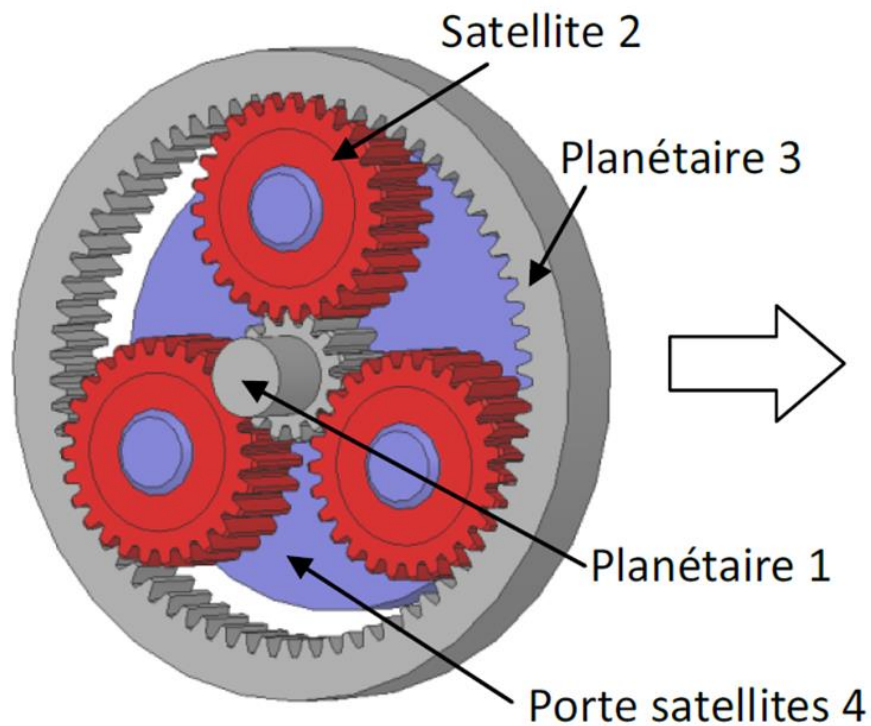
### Trains épicycloïdaux :

- ✓ Arbre d'entrée et de sortie coaxiaux
- ✓ Rapport de réduction ou multiplication → élevé + encombrement faible
- ✓ 3 entrées/sorties possibles, selon les cas de fonctionnement



# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

## Trains épicycloïdaux



Planétaire 1 :  $Z_1 ; R_1$

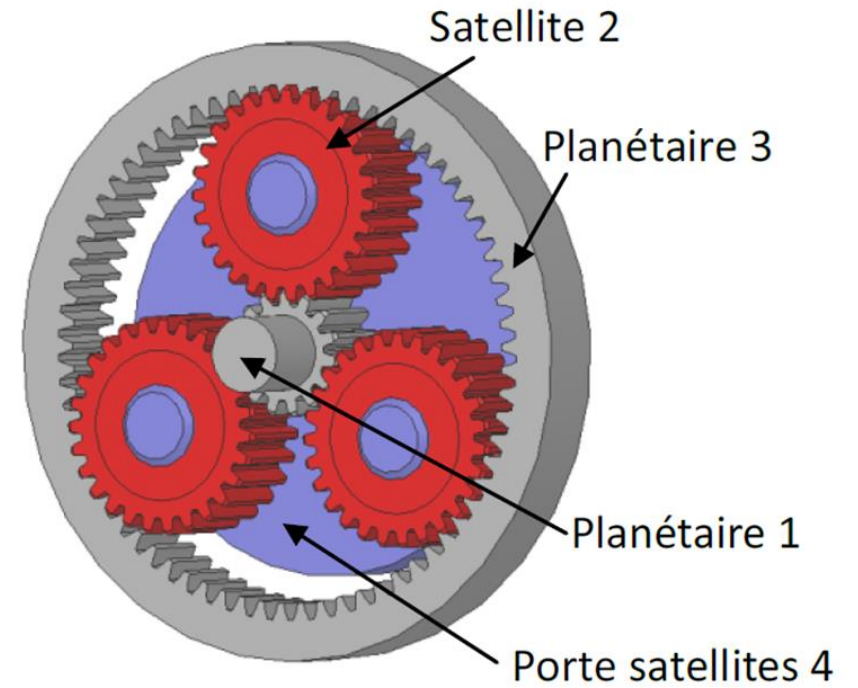
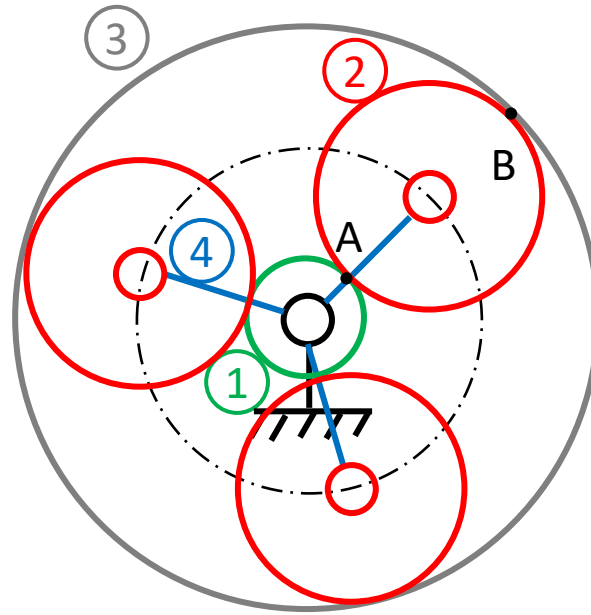
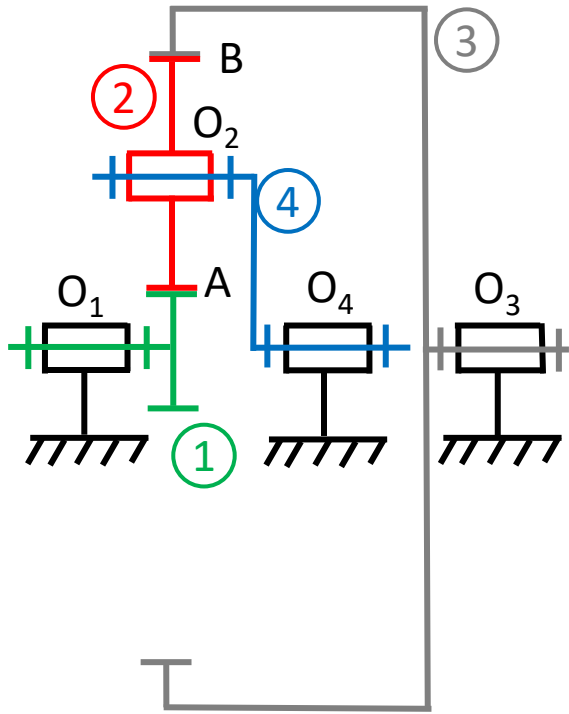
Satellite 2 :  $Z_2 ; R_2$

Couronne (planétaire) 3 :  $Z_3 ; R_3$

Porte satellites : 4

Bâti : 0 (on a souvent 3 = 0)

Remarque importante : L'utilisation de plusieurs satellites ne change rien à la cinématique du système → supprime les efforts radiaux sur les arbres + réduit les efforts sur chaque denture.



Planétaire 1 :  $Z_1 ; R_1$

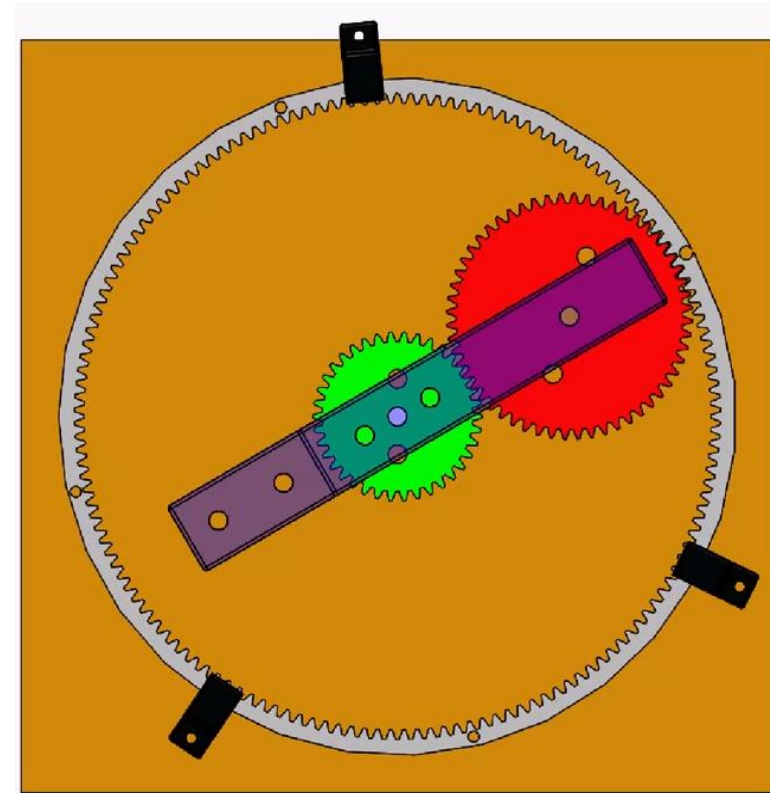
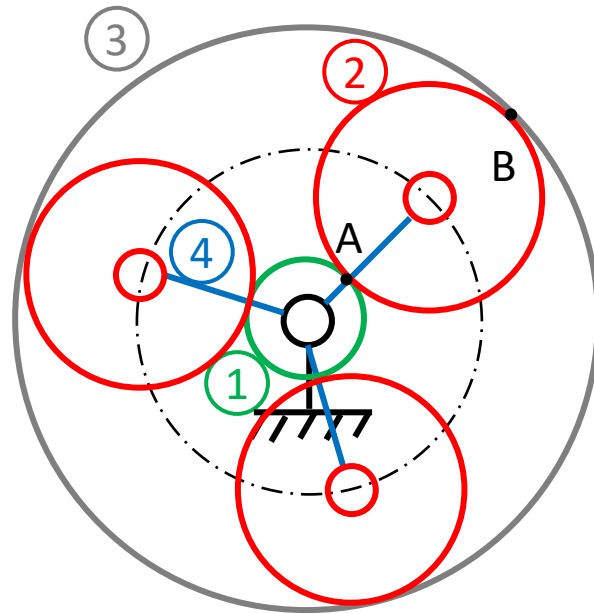
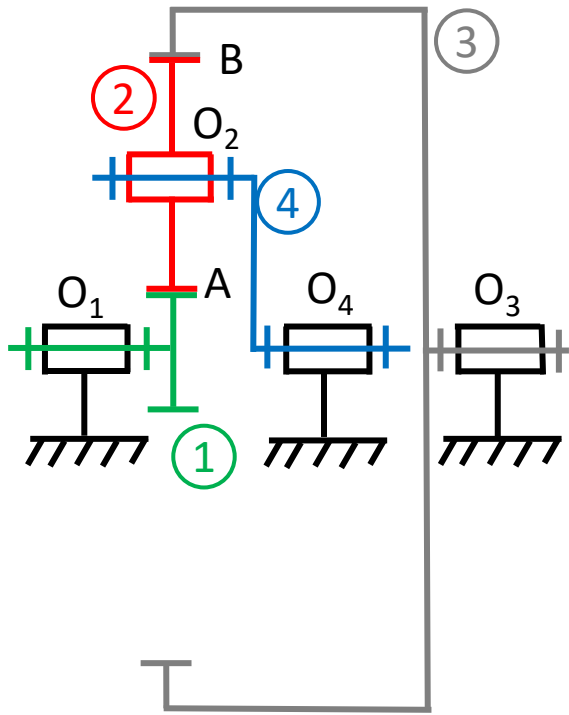
Satellite 2 :  $Z_2 ; R_2$

Couronne (planétaire) 3 :  $Z_3 ; R_3$

Porte satellites : 4

Bâti : 0





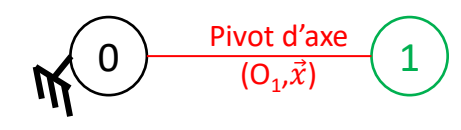
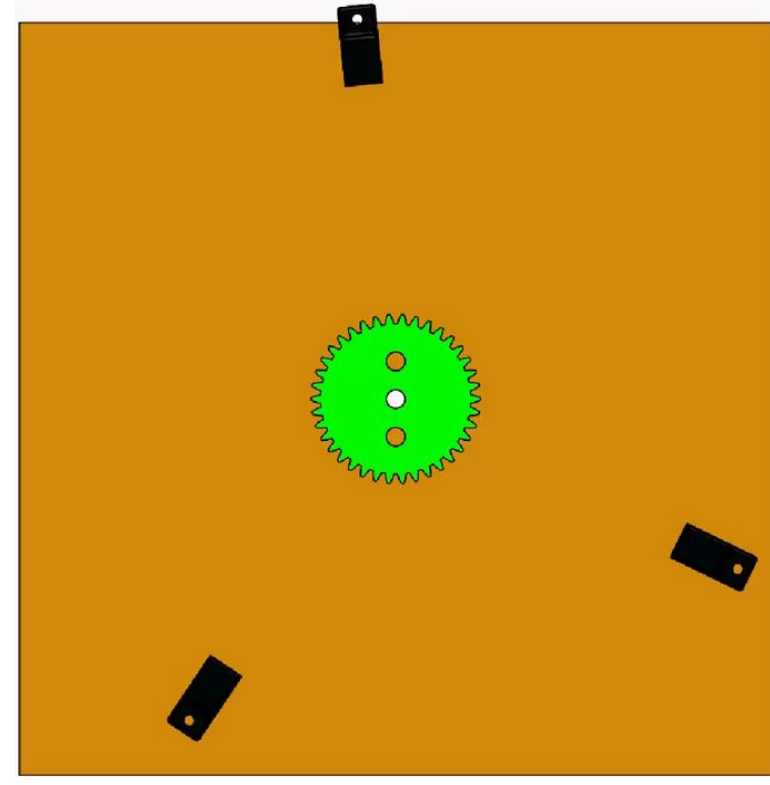
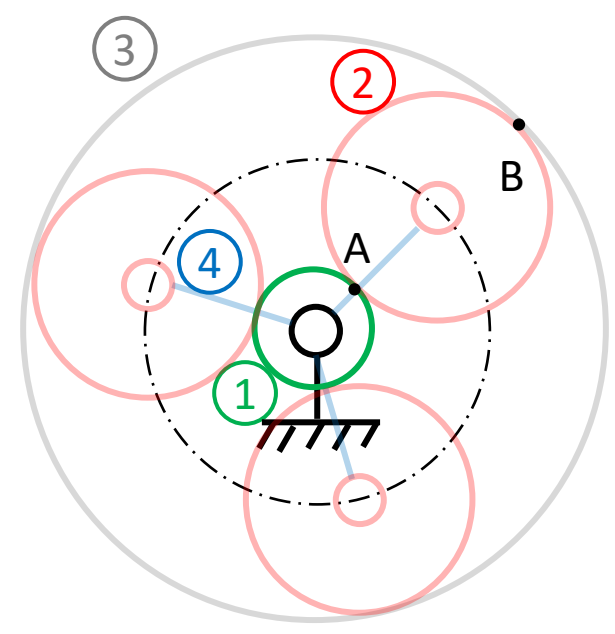
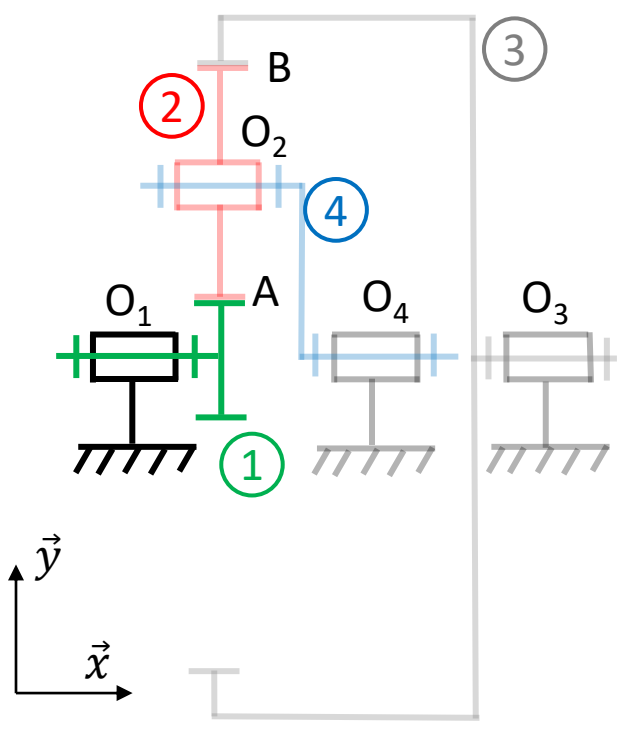
Planétaire 1 :  $Z_1 ; R_1$

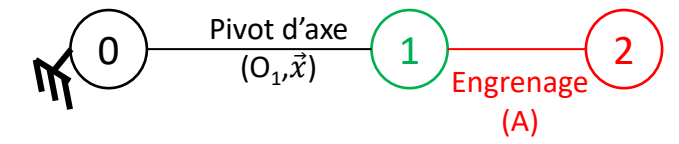
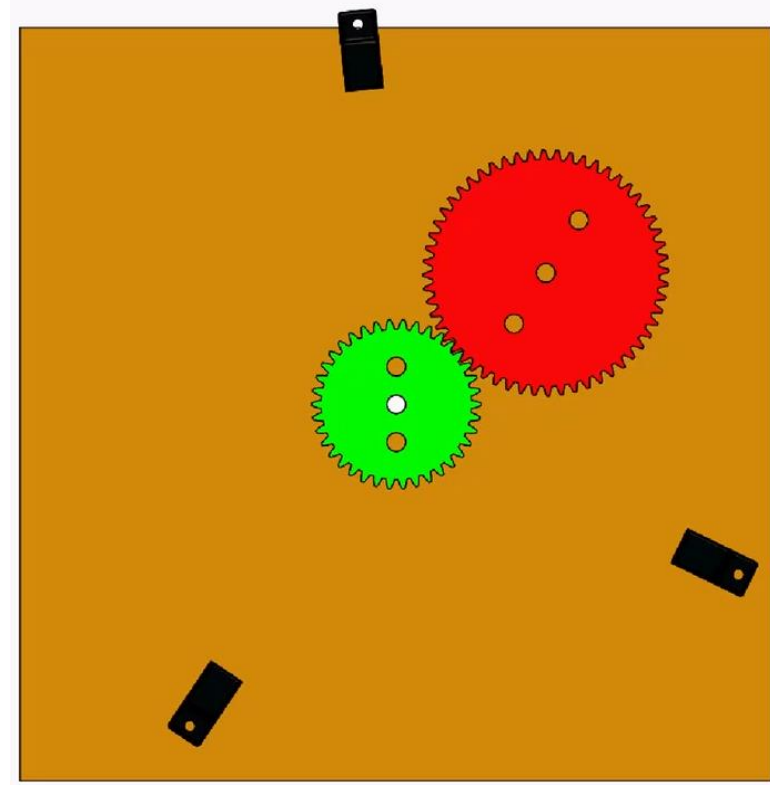
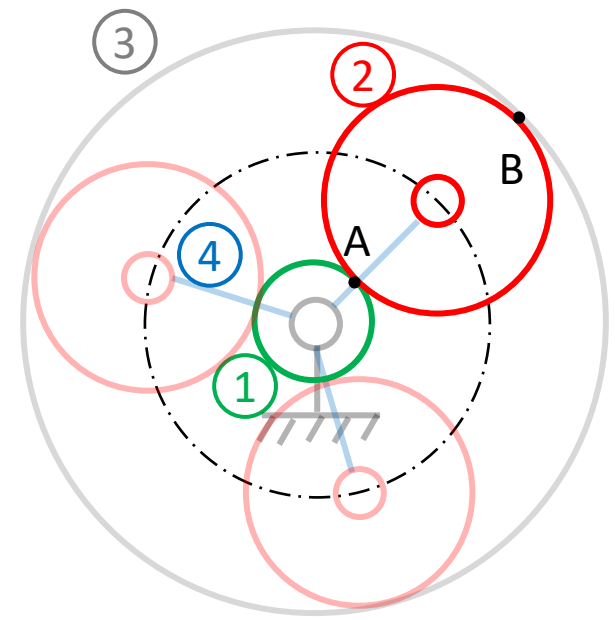
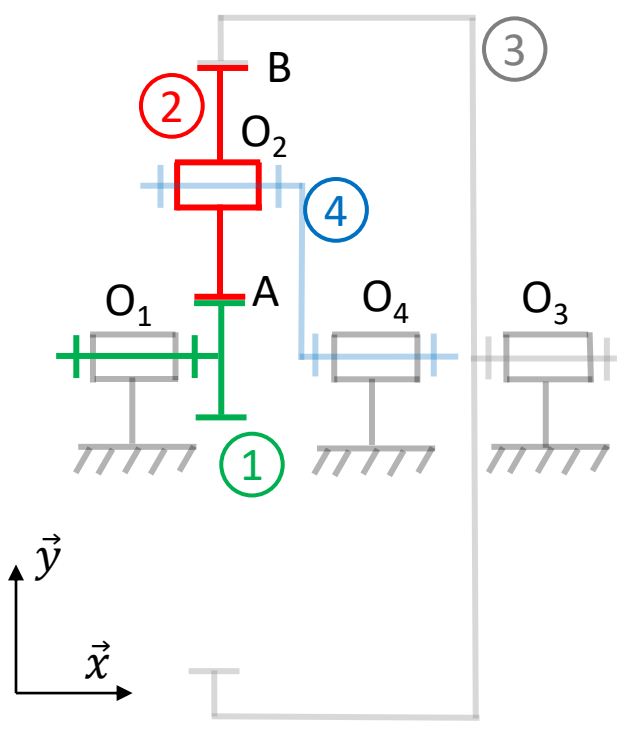
Satellite 2 :  $Z_2 ; R_2$

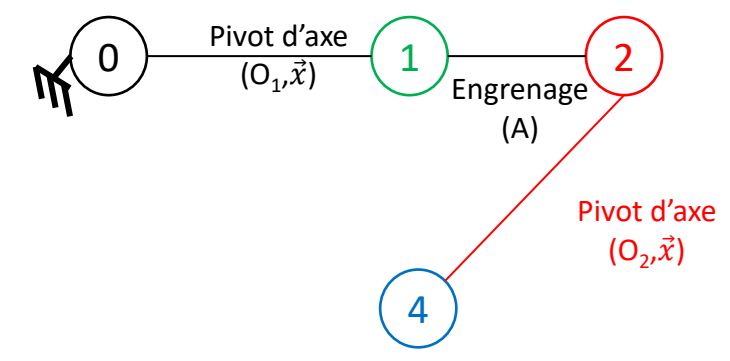
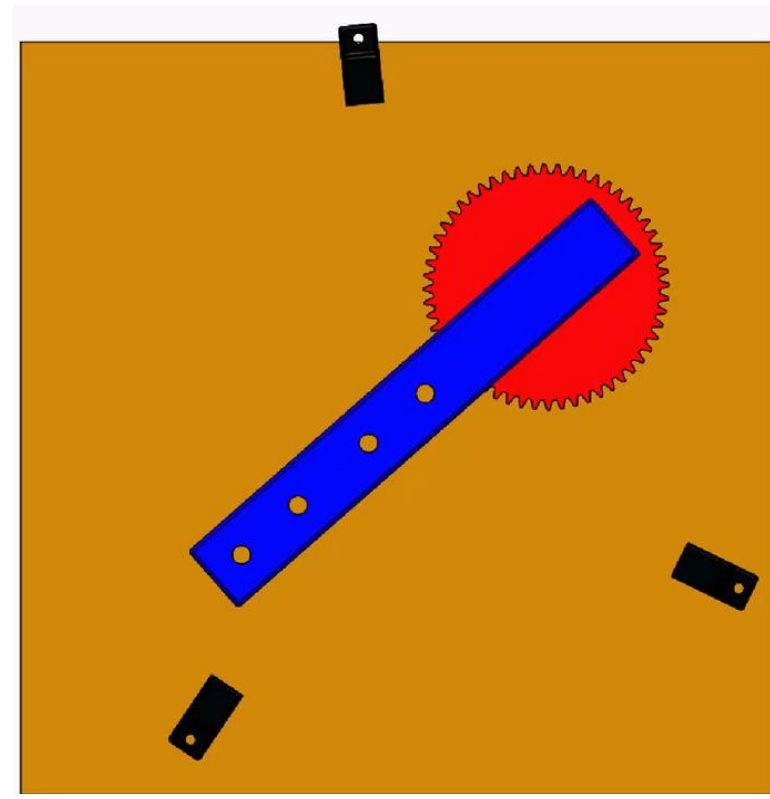
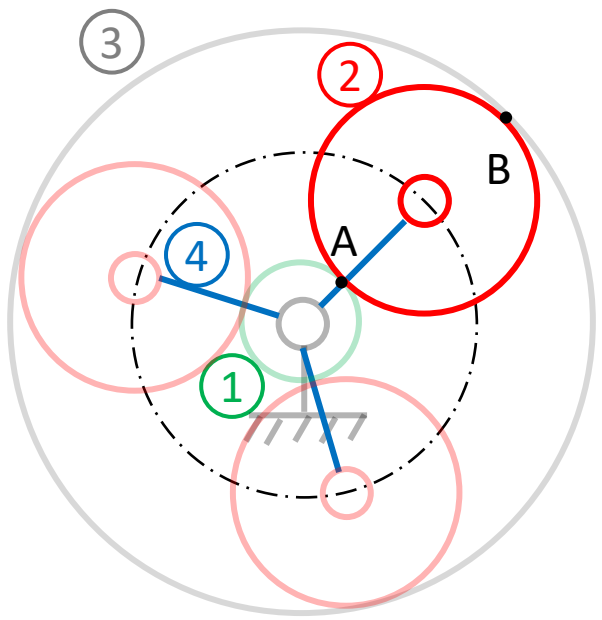
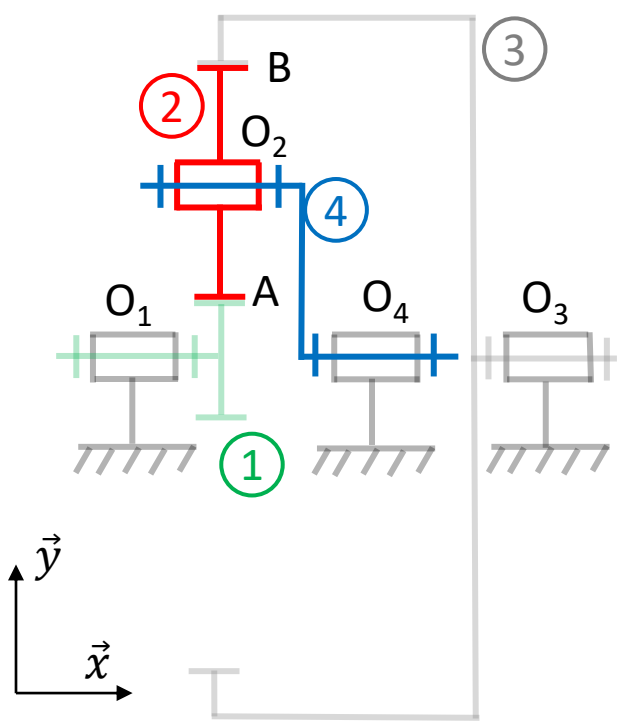
Couronne (planétaire) 3 :  $Z_3 ; R_3$

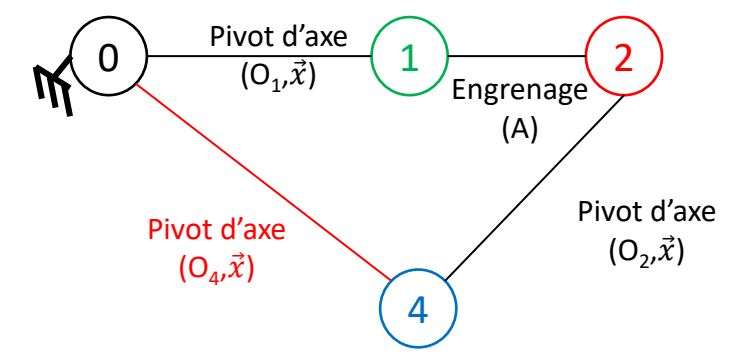
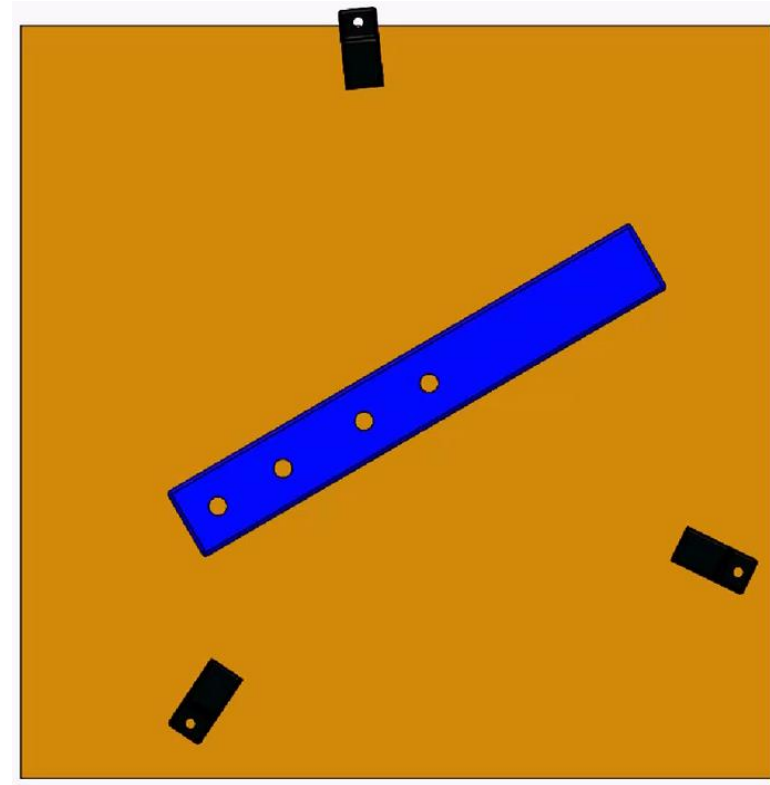
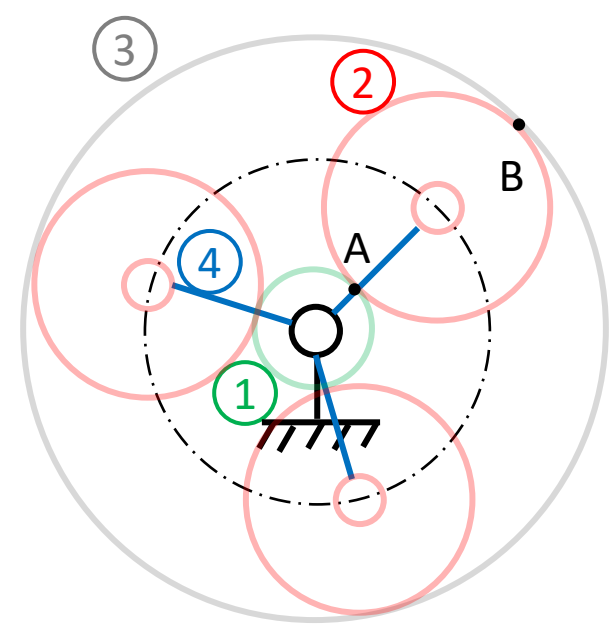
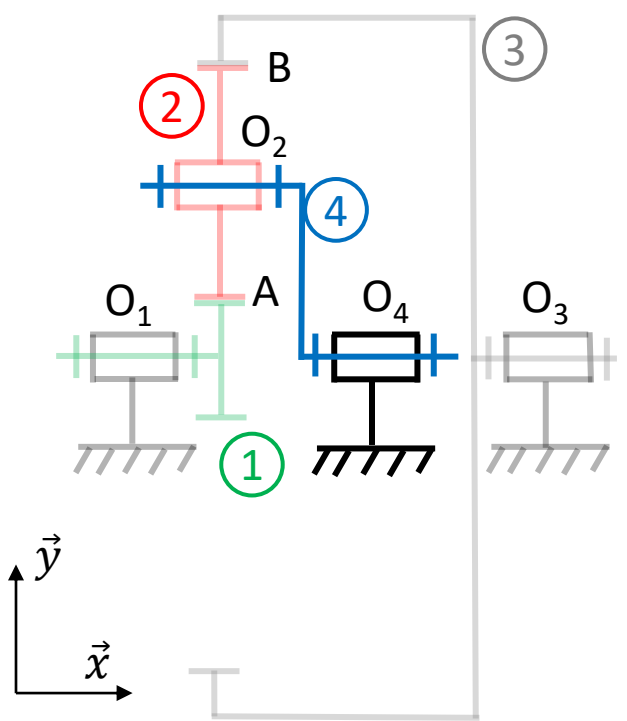
Porte satellites : 4

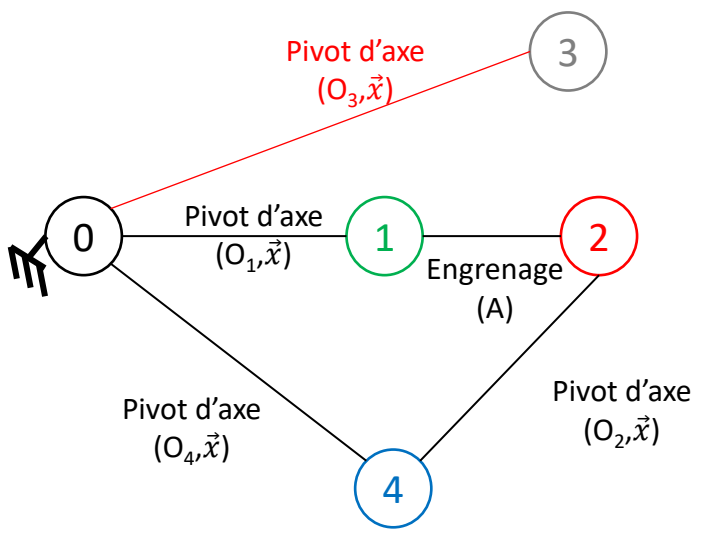
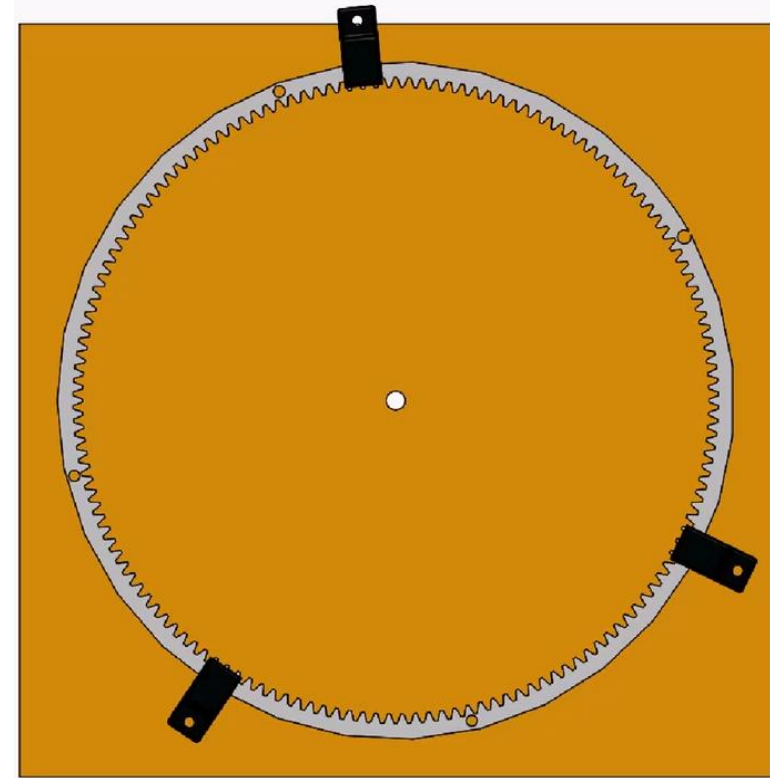
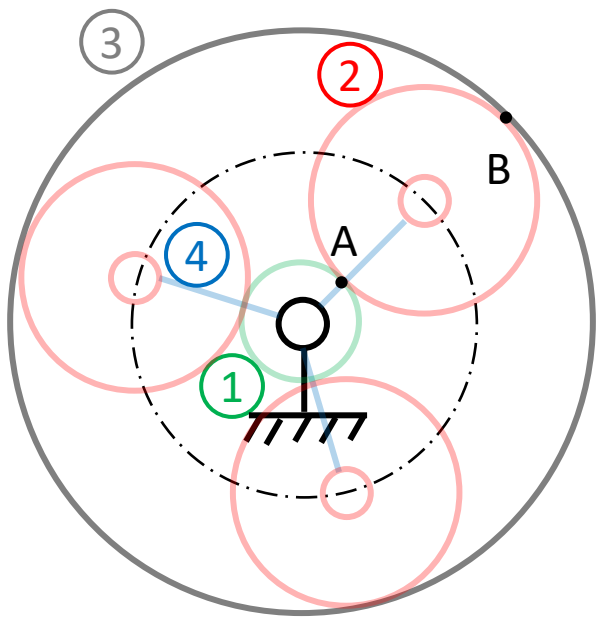
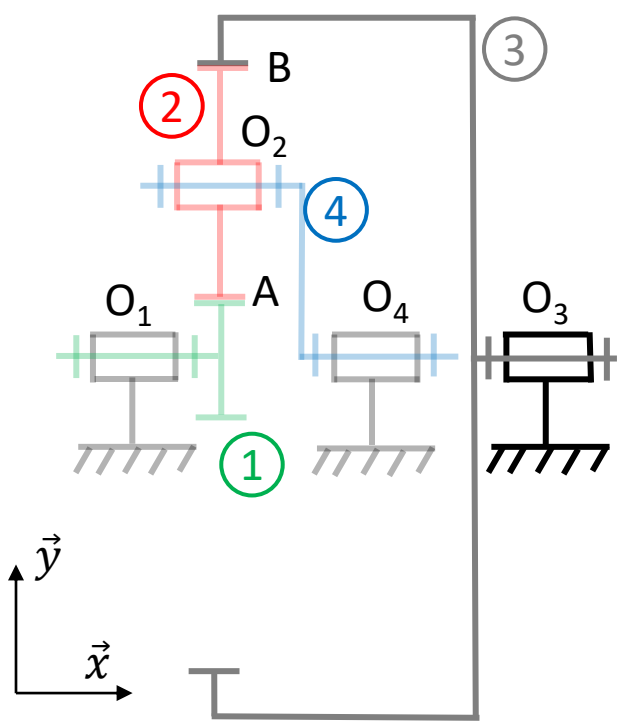
Bâti : 0

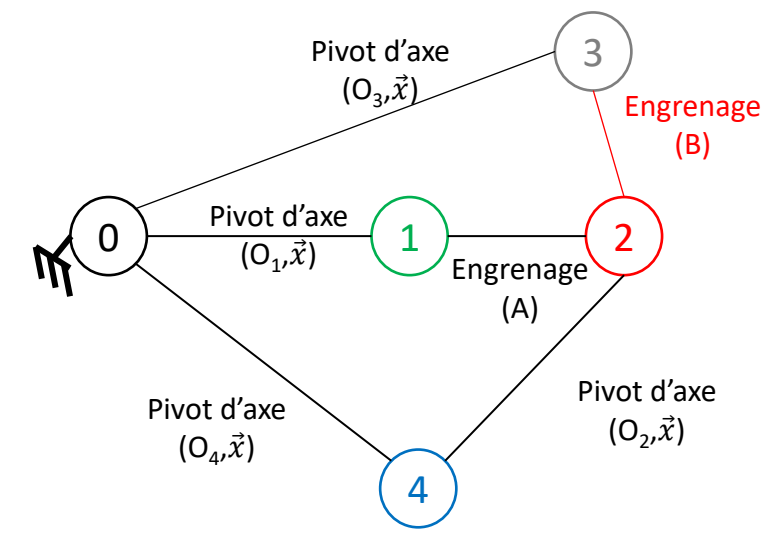
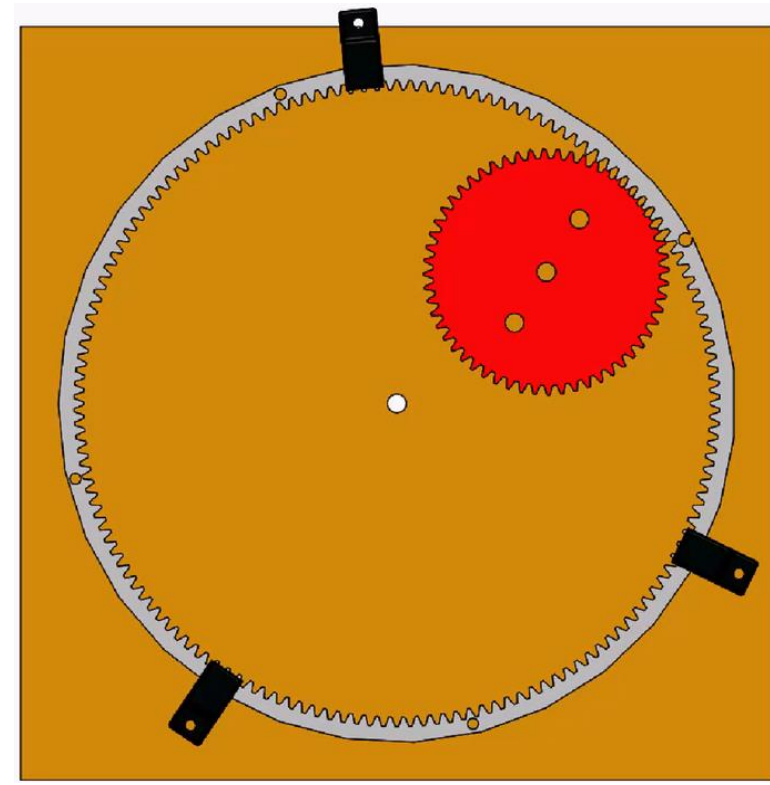
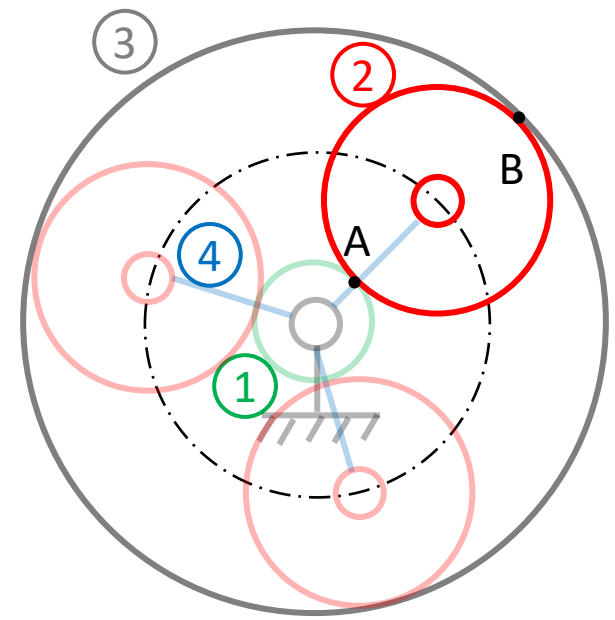
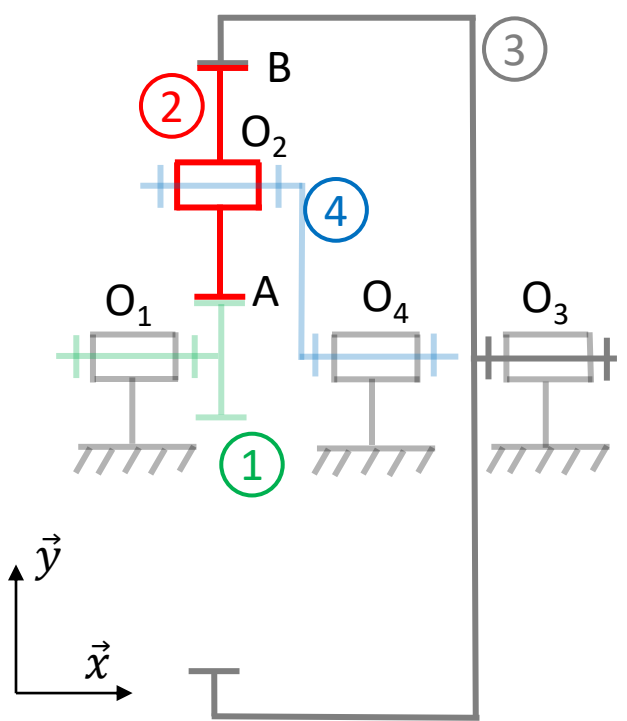


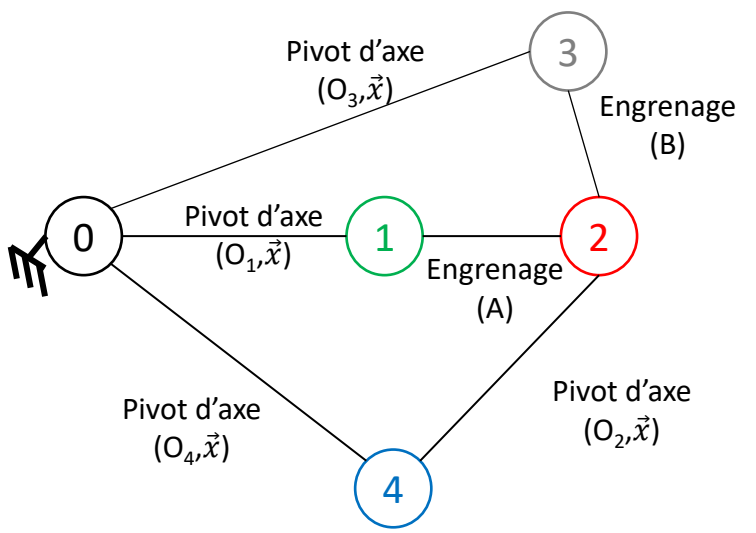
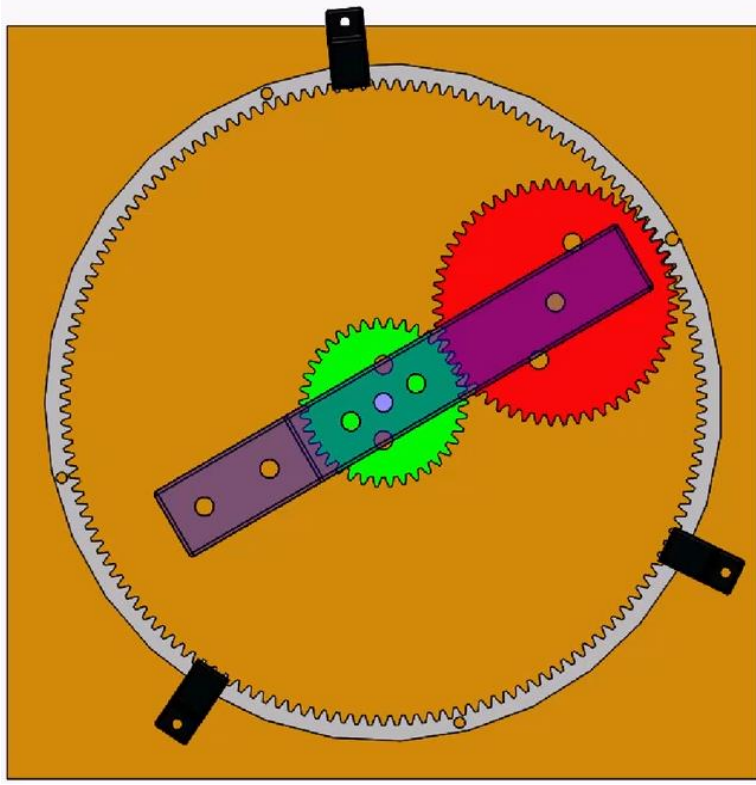
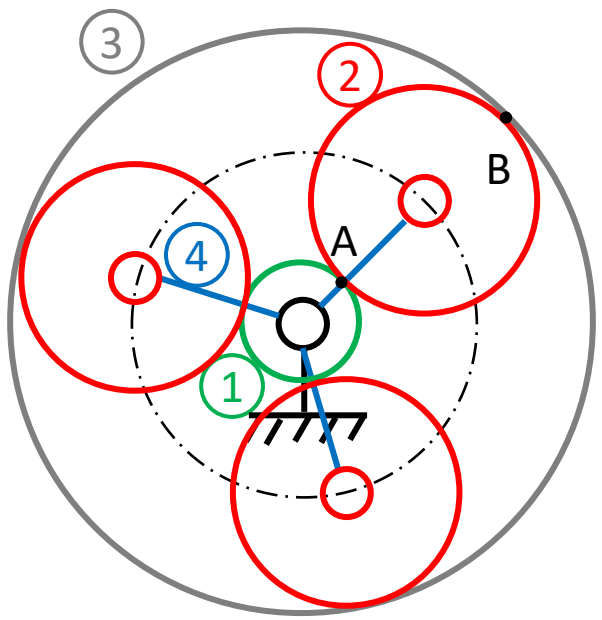
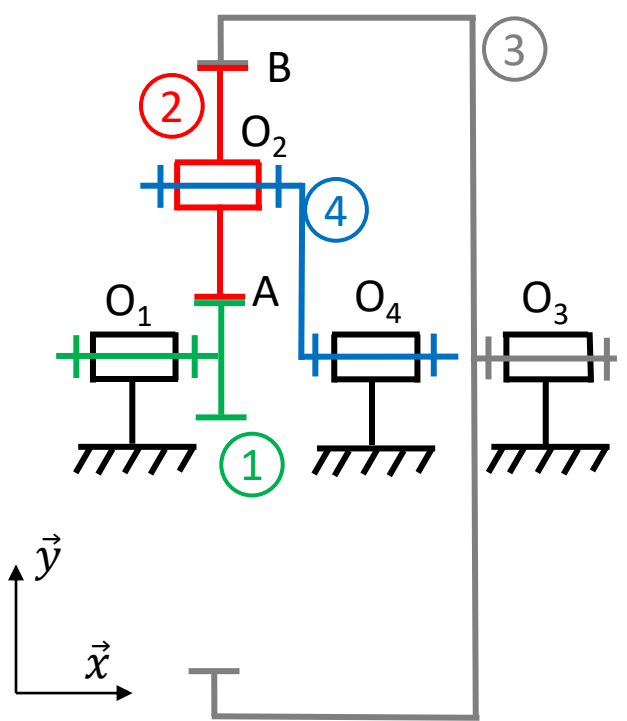




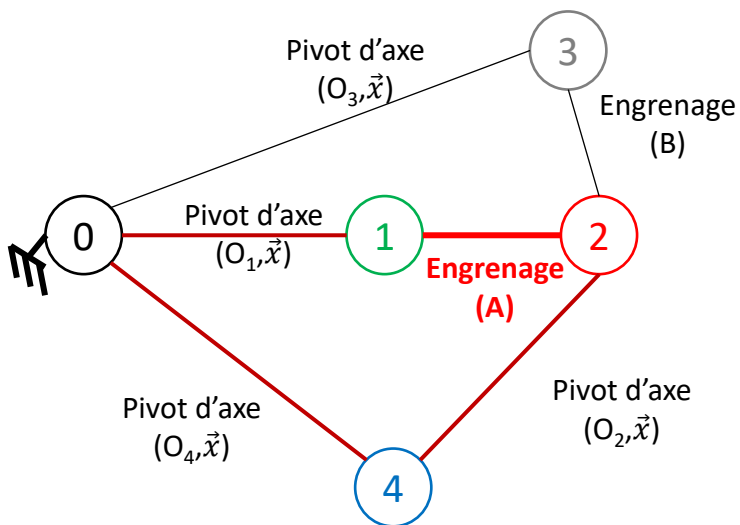
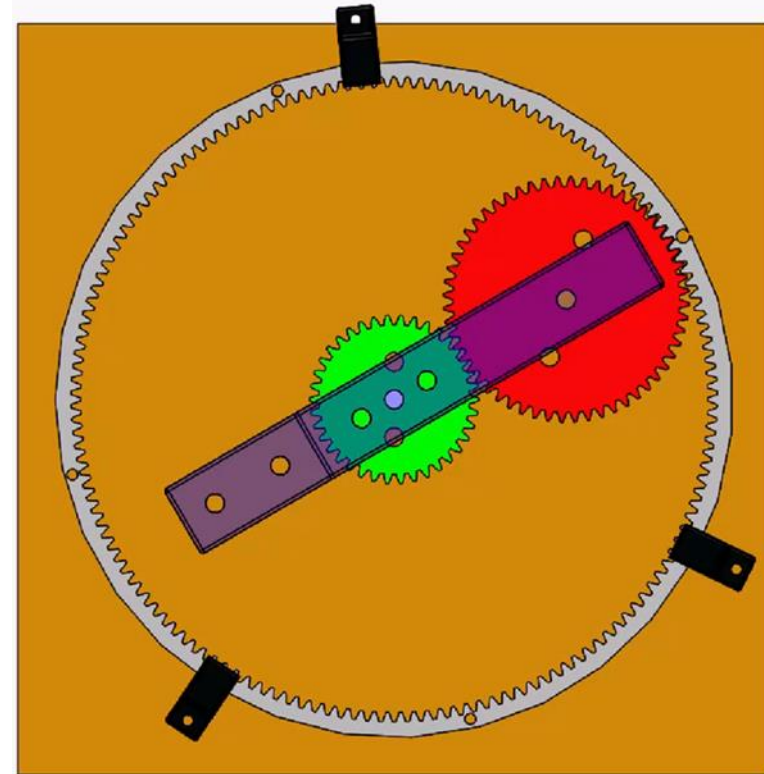
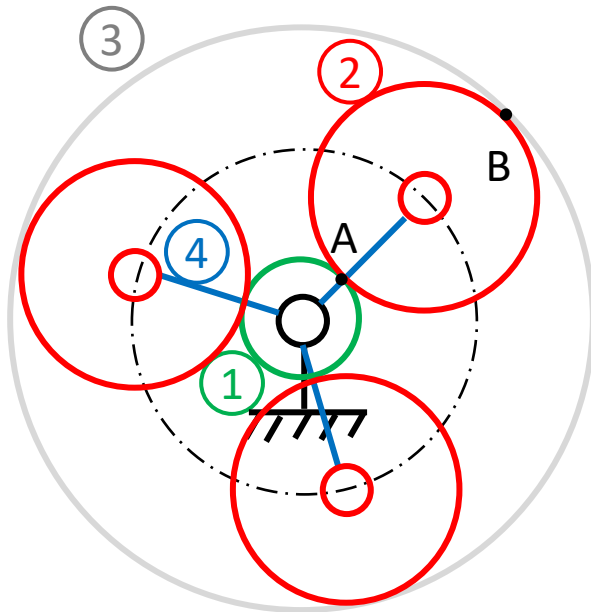
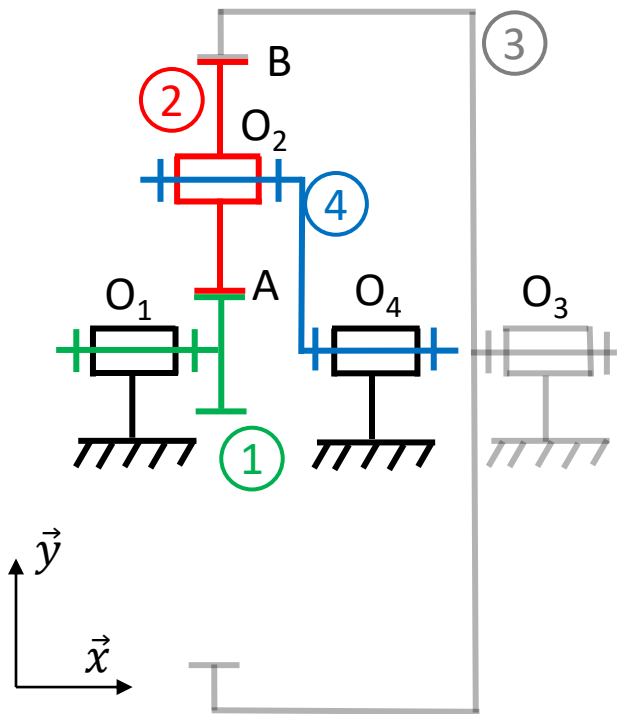












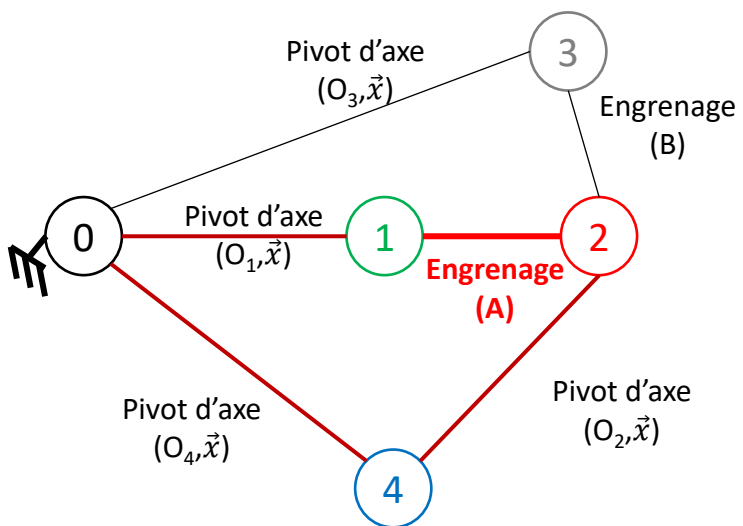
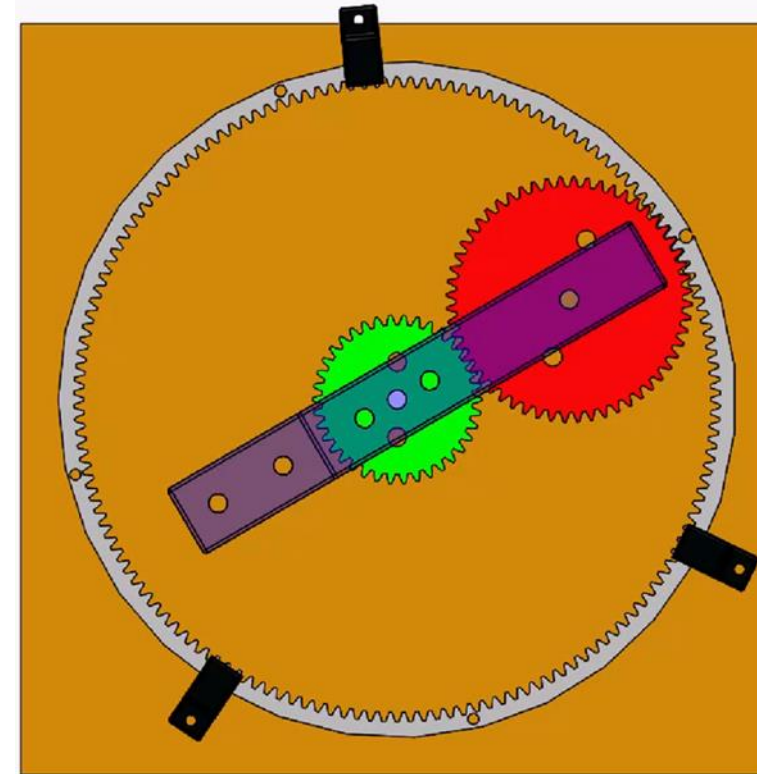
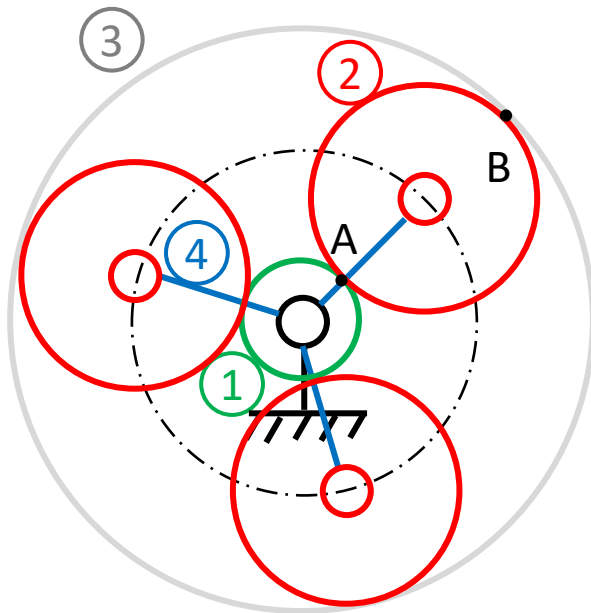
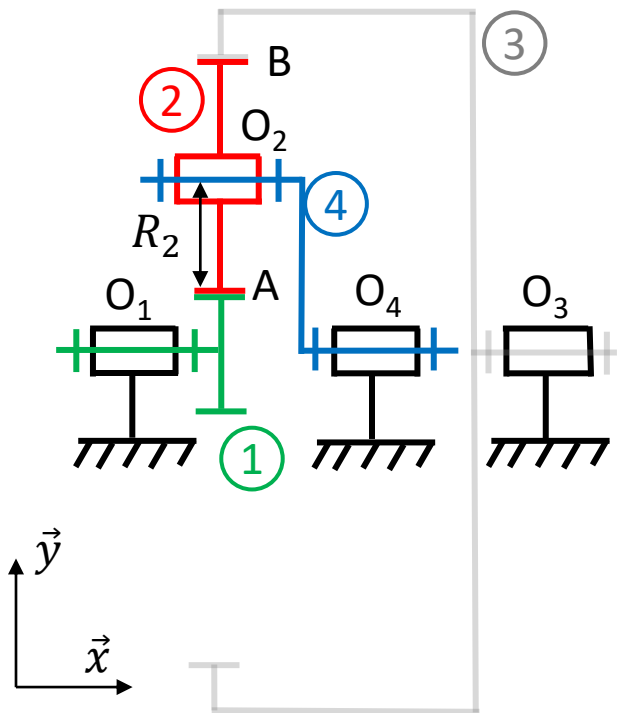
RSG en A entre 2 et 1 :

$$\overrightarrow{V(A \in 2/1)} = \vec{0} \quad \text{Or } \overrightarrow{V(A \in 2/1)} = \overrightarrow{V(A \in 2/0)} + \overrightarrow{V(A \in 0/1)} = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{V(A \in 2/0)} = \overrightarrow{V(A \in 1/0)}$$

$$\text{Or } \overrightarrow{V(A \in 2/0)} = \overrightarrow{V(A \in 2/4)} + \overrightarrow{V(A \in 4/0)}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{V(A \in 2/4)} + \overrightarrow{V(A \in 4/0)} = \overrightarrow{V(A \in 1/0)}$$



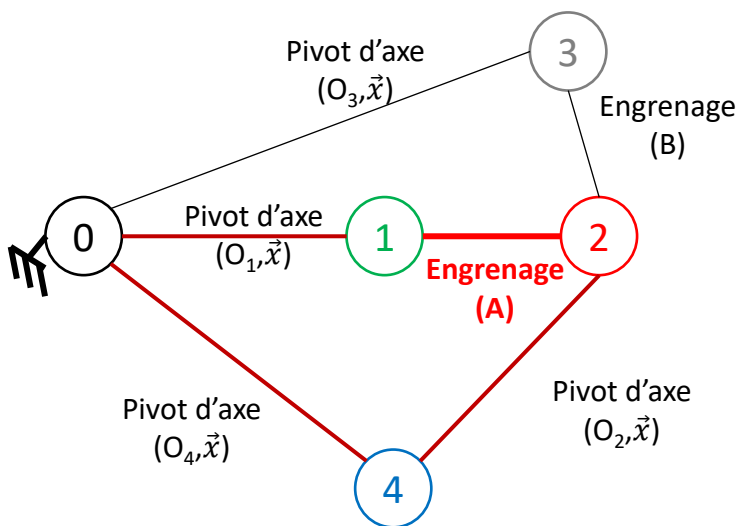
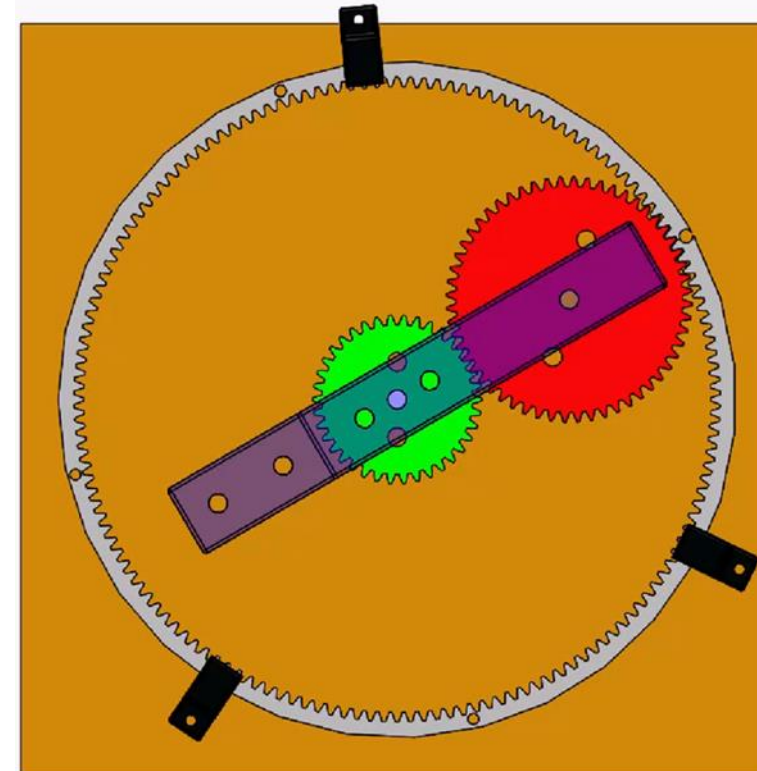
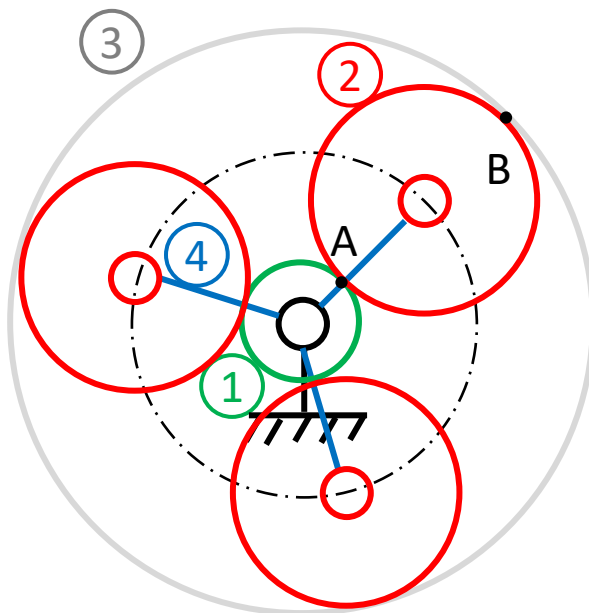
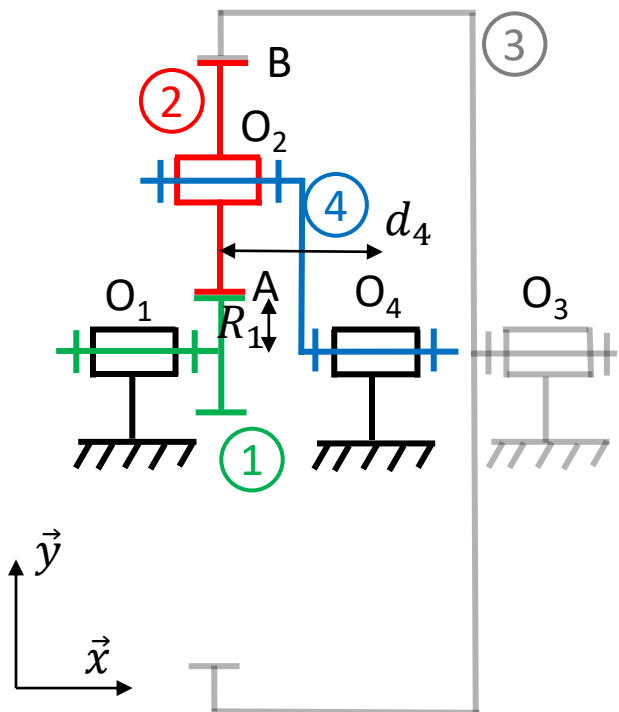
RSG en A entre 2 et 1 :

$$\overrightarrow{V(A \in 2/4)} = \overrightarrow{V(O_2 \in 2/4)} + \overrightarrow{AO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{24}}$$

$$\overrightarrow{V(A \in 2/4)} = \vec{0} + R_2 \cdot \vec{y} \wedge \omega_{24} \vec{x} = -R_2 \cdot \omega_{24} \vec{z}$$

$$\overrightarrow{V(A \in 2/4)} + \overrightarrow{V(A \in 4/0)} = \overrightarrow{V(A \in 1/0)}$$

BABAR au point  $O_2$



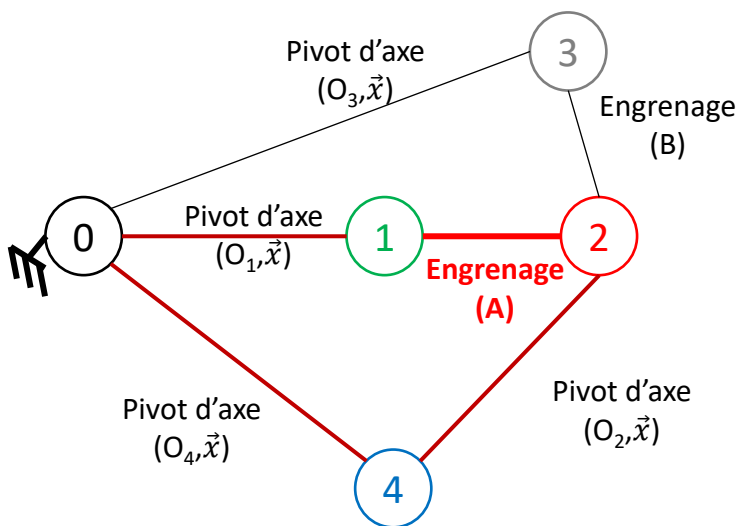
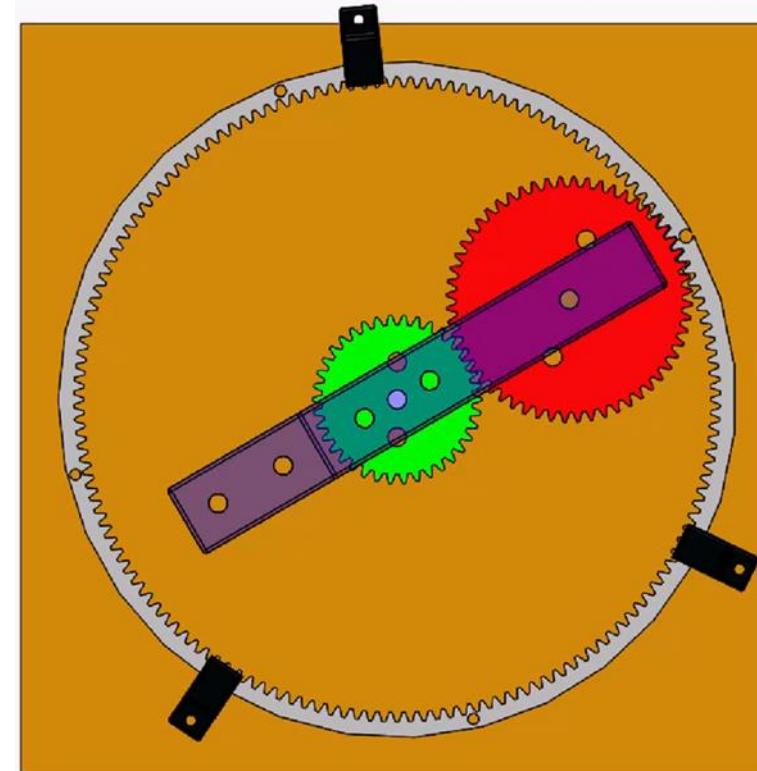
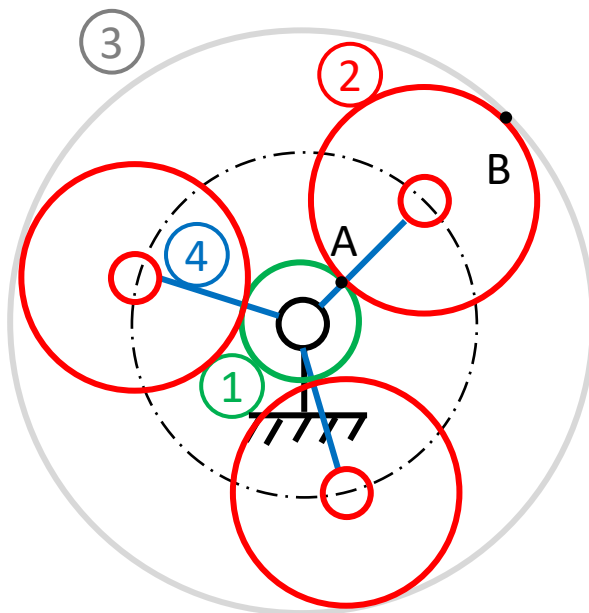
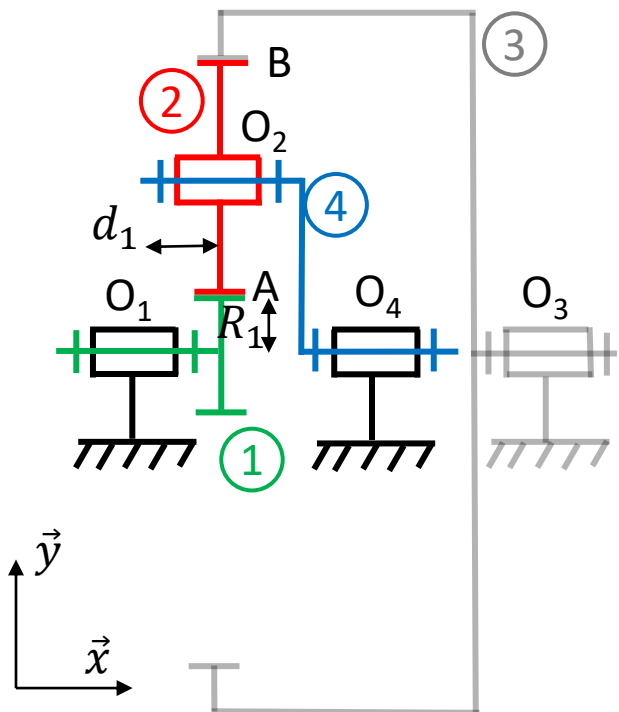
RSG en A entre 2 et 1 :

$$\overrightarrow{V(A \in 2/4)} + \overrightarrow{V(A \in 4/0)} = \overrightarrow{V(A \in 1/0)}$$

$$\overrightarrow{V(A \in 4/0)} = \overrightarrow{V(O_4 \in 4/0)} + \overrightarrow{AO_4} \wedge \overrightarrow{\Omega_{40}}$$

*BABAR au point O<sub>4</sub>*

$$\overrightarrow{V(A \in 4/0)} = \vec{0} + (-R_1 \cdot \vec{y} + d_4 \cdot \vec{x}) \wedge \omega_{40} \vec{x} = \mathbf{R_1} \cdot \omega_{40} \vec{z}$$



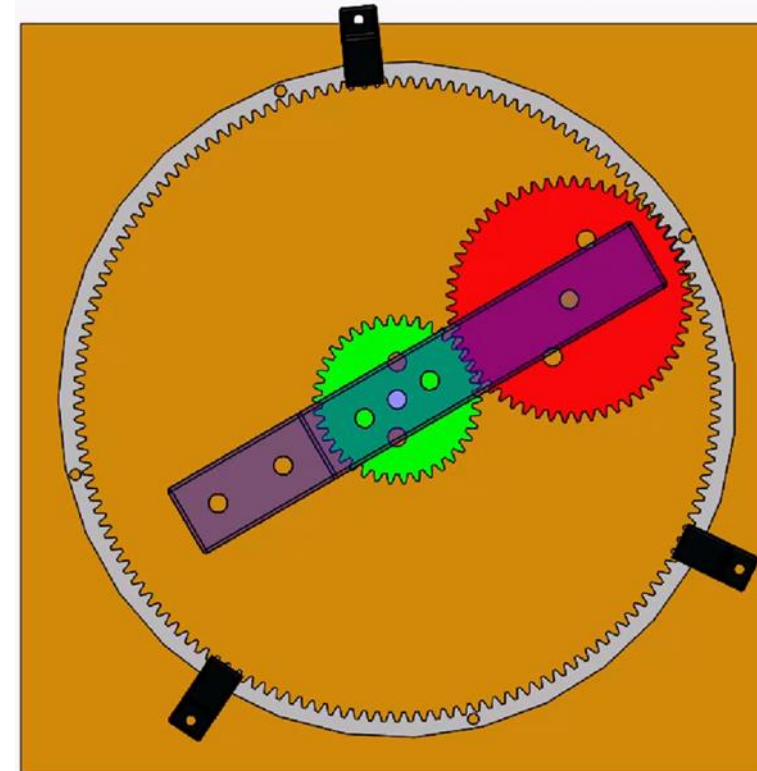
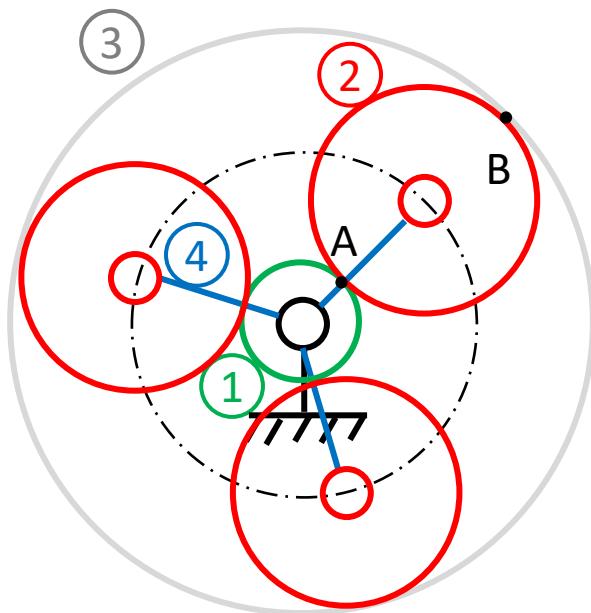
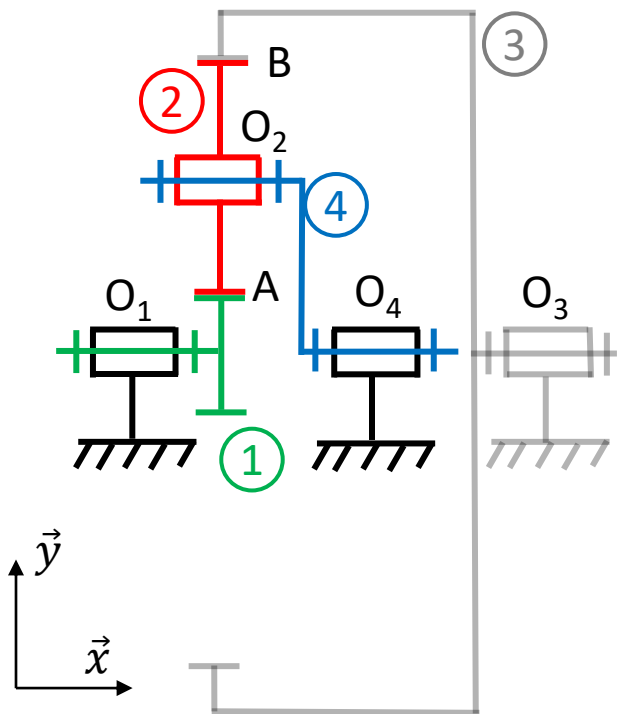
RSG en A entre 2 et 1 :

$$\overrightarrow{V(A \in 2/4)} + \overrightarrow{V(A \in 4/0)} = \overrightarrow{V(A \in 1/0)}$$

$$\overrightarrow{V(A \in 1/0)} = \overrightarrow{V(O_1 \in 1/0)} + \overrightarrow{AO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{10}}$$

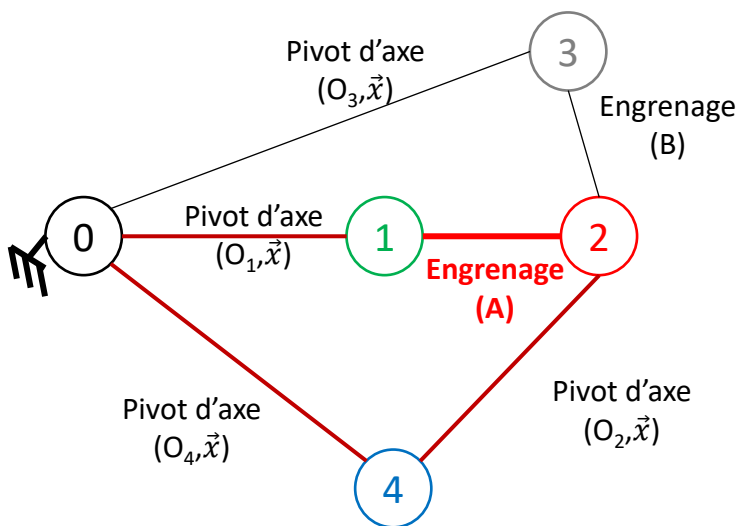
*BABAR au point O<sub>1</sub>*

$$\overrightarrow{V(A \in 1/0)} = \vec{0} + (-R_1 \cdot \vec{y} - d_1 \cdot \vec{x}) \wedge \omega_{10} \vec{z} = \mathbf{R}_1 \cdot \omega_{10} \vec{z}$$



RSG en A entre 2 et 1 :

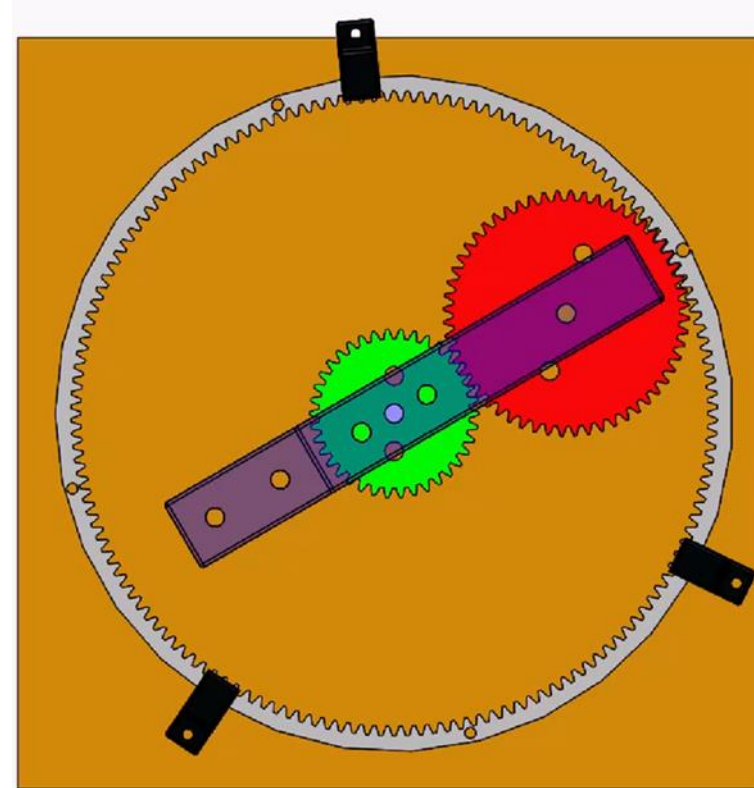
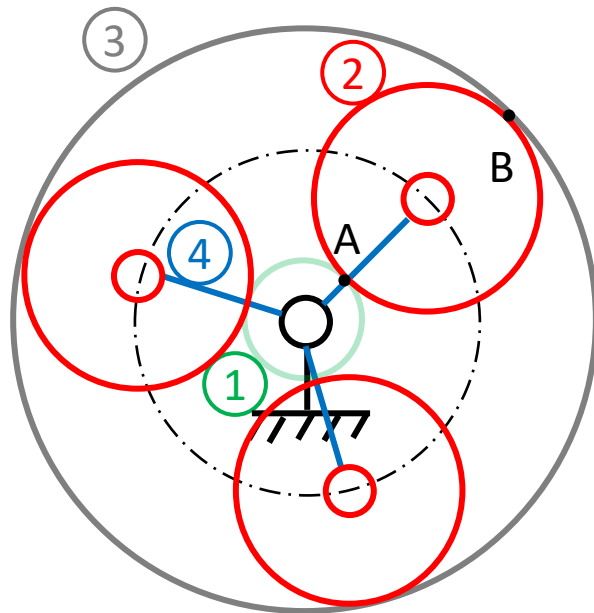
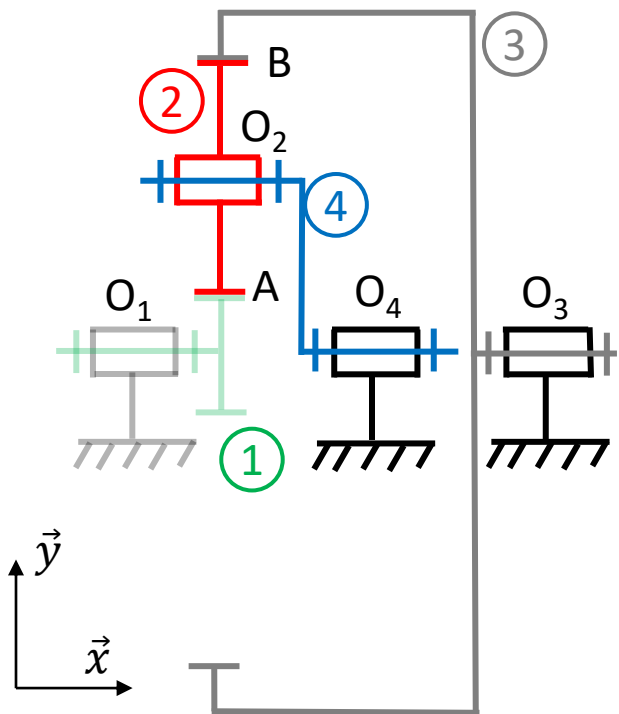
$$\overrightarrow{V(A \in 2/4)} + \overrightarrow{V(A \in 4/0)} = \overrightarrow{V(A \in 1/0)}$$



Donc  $-R_2 \cdot \omega_{24} \vec{z} + R_1 \cdot \omega_{40} \vec{z} = R_1 \cdot \omega_{10} \vec{z}$

En projetant sur  $\vec{z}$ , on obtient :

$$-R_2 \cdot \omega_{24} + R_1 \cdot \omega_{40} = R_1 \cdot \omega_{10} \quad (1)$$



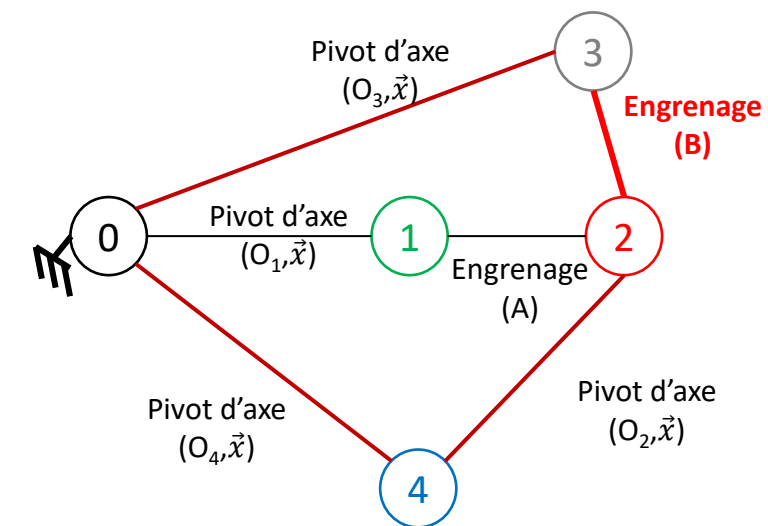
RSG en B entre 2 et 3 :

$$\overrightarrow{V(B \in 2/3)} = \vec{0} \quad \text{Or } \overrightarrow{V(B \in 2/3)} = \overrightarrow{V(B \in 2/0)} + \overrightarrow{V(B \in 0/3)} = \vec{0}$$

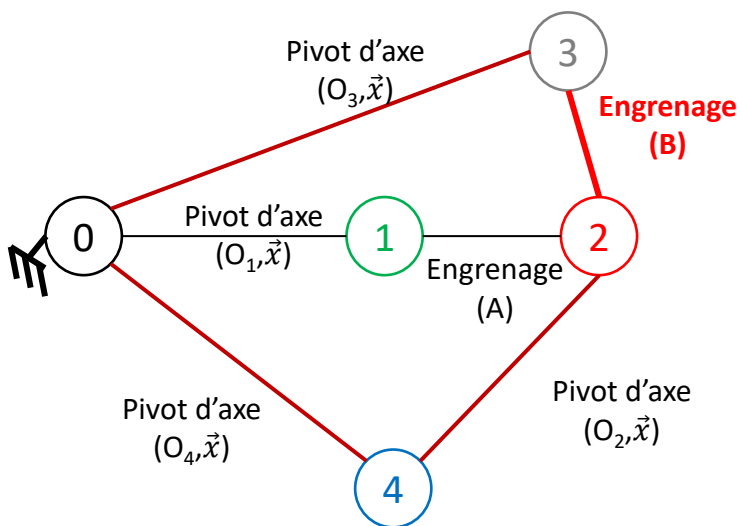
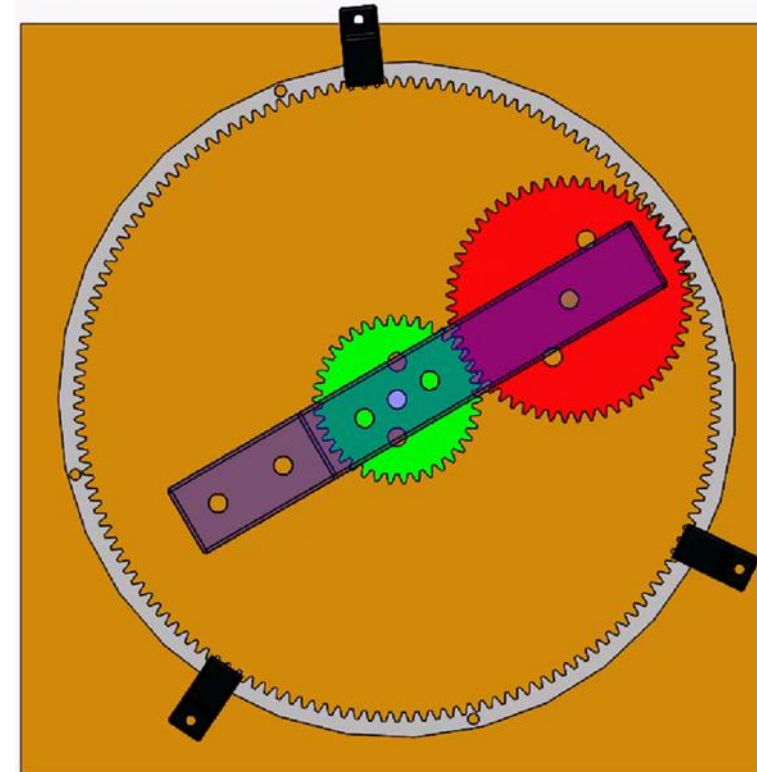
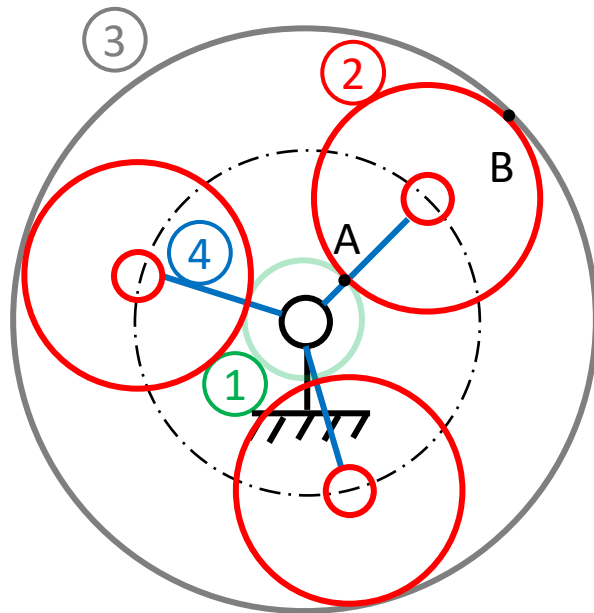
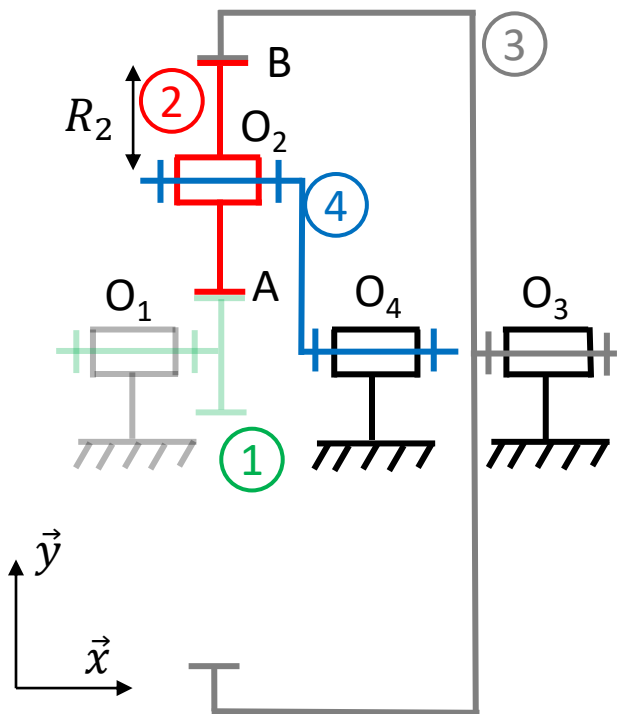
$$\text{Donc } \overrightarrow{V(B \in 2/0)} = \overrightarrow{V(B \in 3/0)}$$

$$\text{Or } \overrightarrow{V(B \in 2/0)} = \overrightarrow{V(B \in 2/4)} + \overrightarrow{V(B \in 4/0)}$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{V(B \in 2/4)} + \overrightarrow{V(B \in 4/0)} = \overrightarrow{V(B \in 3/0)}$$







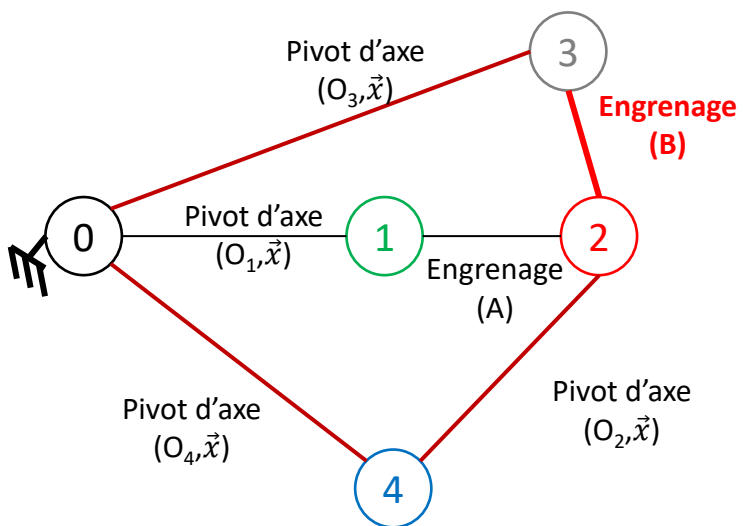
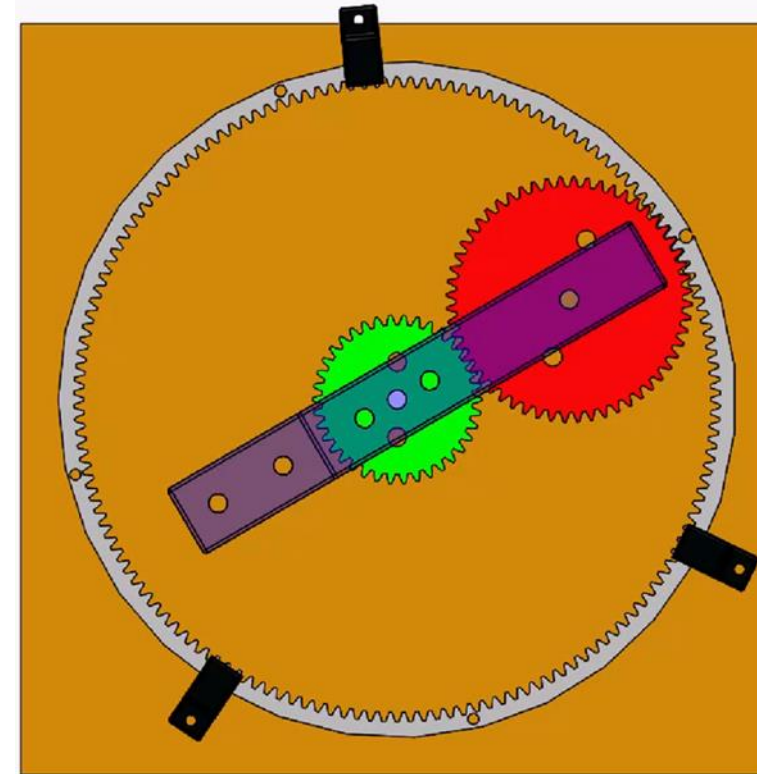
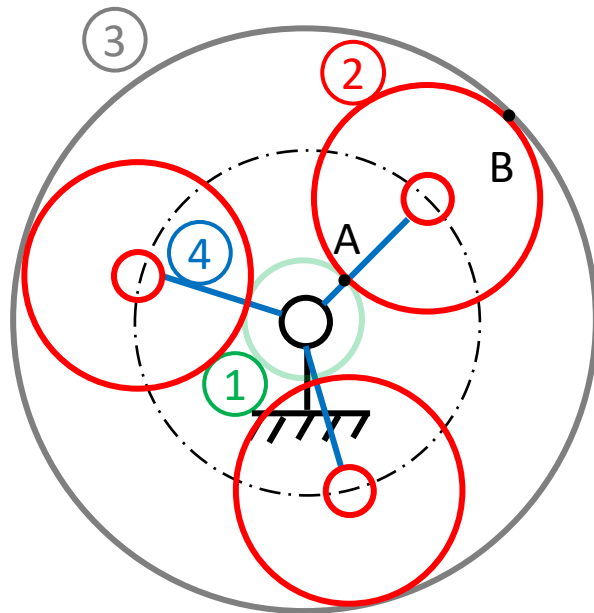
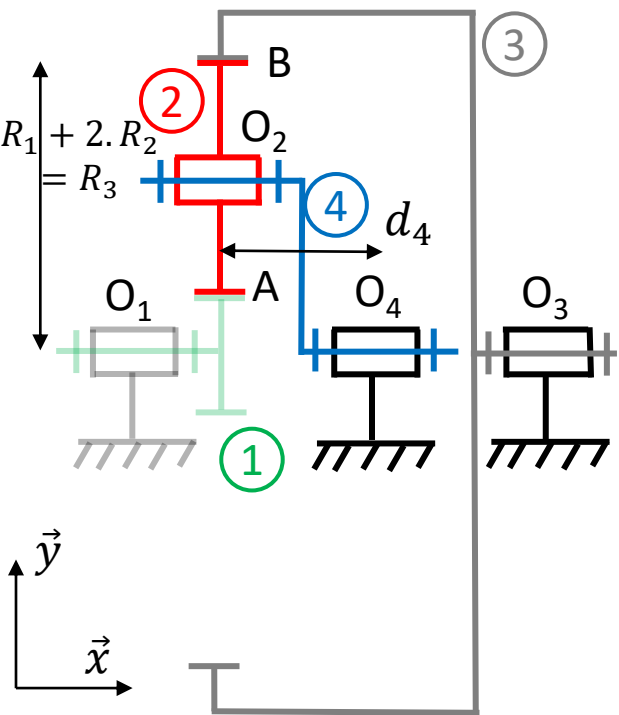
RSG en B entre 2 et 3 :

$$\overrightarrow{V(B \in 2/4)} = \overrightarrow{V(O_2 \in 2/4)} + \overrightarrow{BO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{24}}$$

$$\overrightarrow{V(B \in 2/4)} = \vec{0} - R_2 \cdot \vec{y} \wedge \omega_{24} \vec{x} = +R_2 \cdot \omega_{24} \vec{z}$$

$$\overrightarrow{V(B \in 2/4)} + \overrightarrow{V(B \in 4/0)} = \overrightarrow{V(B \in 3/0)}$$

BABAR au point  $O_2$



RSG en B entre 2 et 3 :

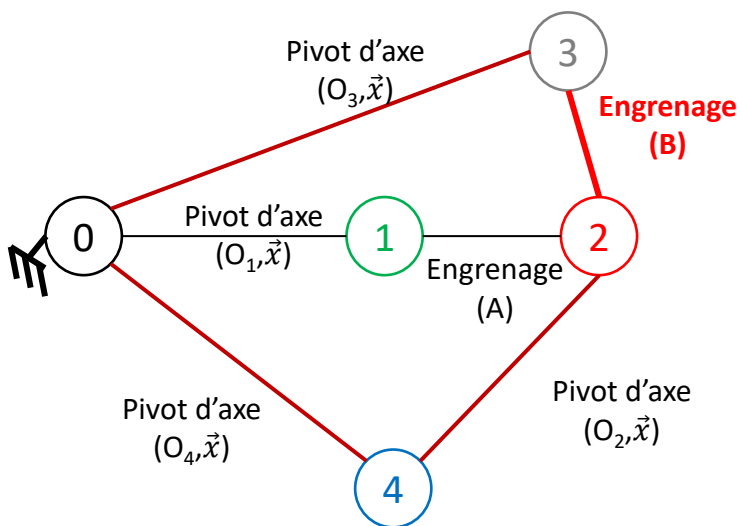
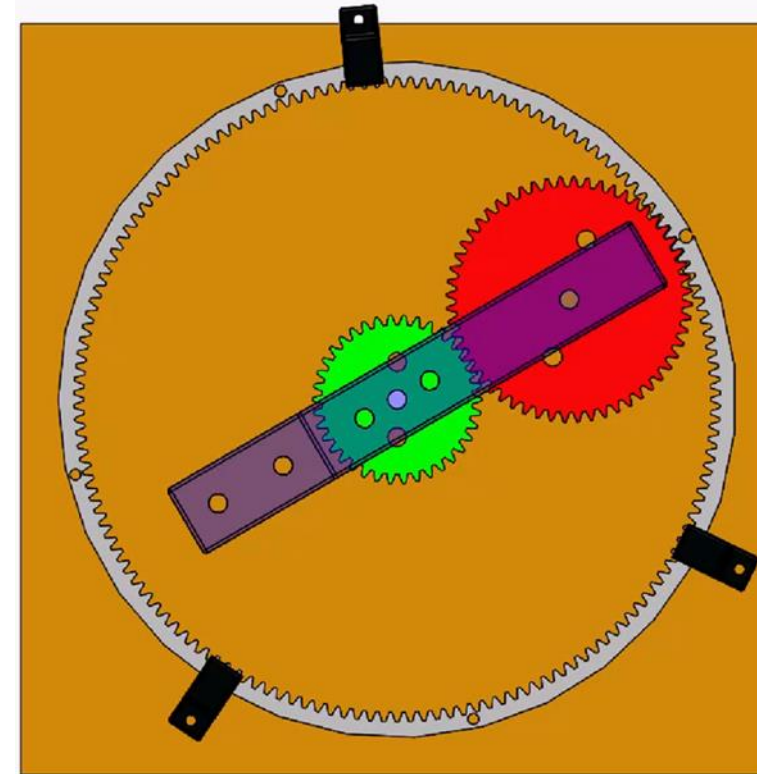
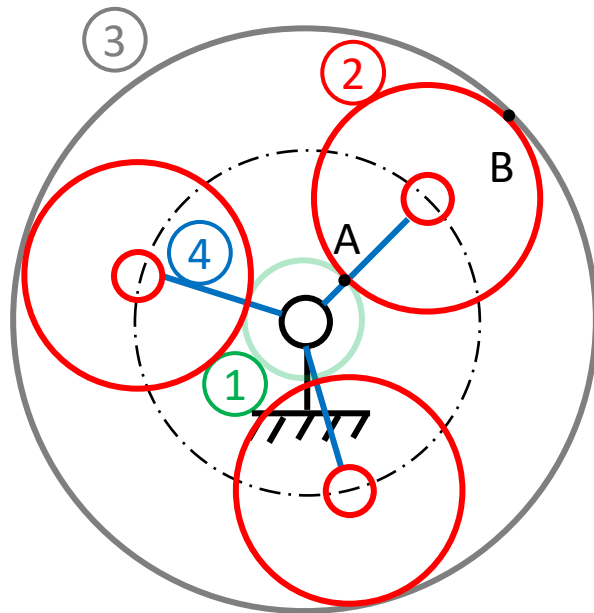
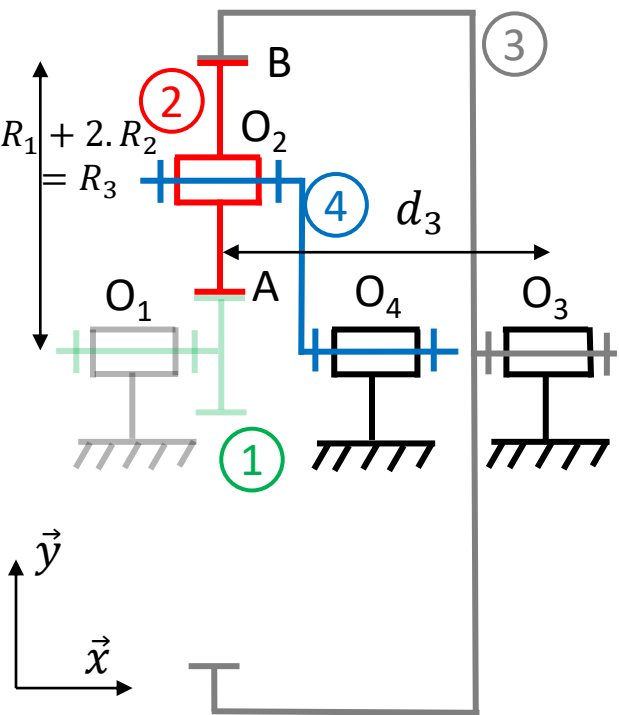
$$\overrightarrow{V(B \in 2/4)} + \overrightarrow{V(B \in 4/0)} = \overrightarrow{V(B \in 3/0)}$$

$$\overrightarrow{V(B \in 4/0)} = \overrightarrow{V(O_4 \in 4/0)} + \overrightarrow{BO_4} \wedge \overrightarrow{\Omega_{40}}$$

BABAR au point  $O_4$

$$\overrightarrow{V(B \in 4/0)} = \vec{0} + (-R_3 \cdot \vec{y} + d_4 \cdot \vec{x}) \wedge \omega_{40} \vec{x} = R_3 \cdot \omega_{40} \vec{z}$$





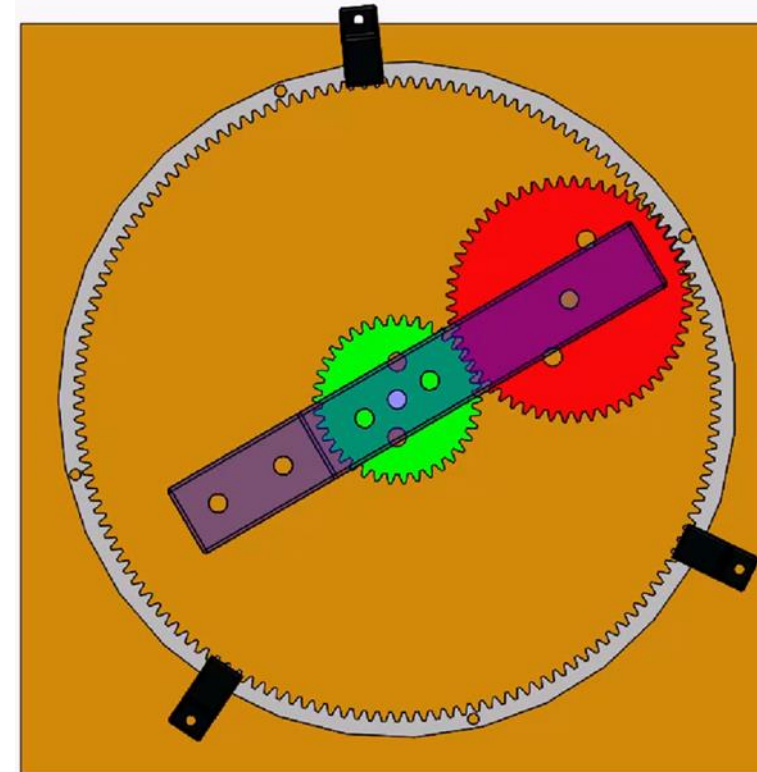
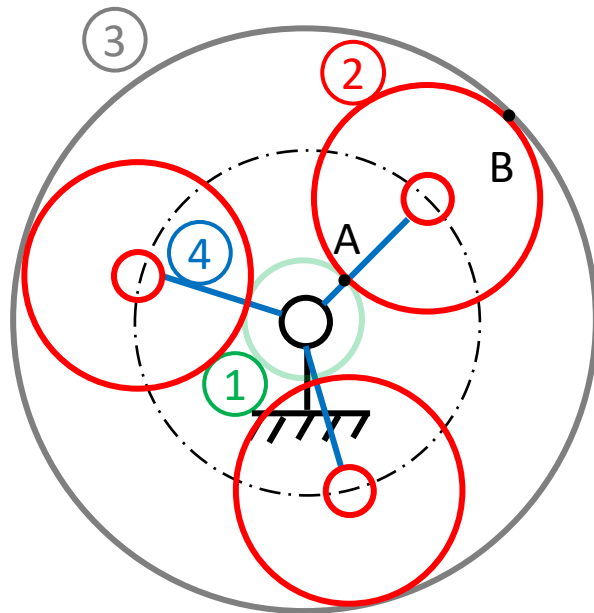
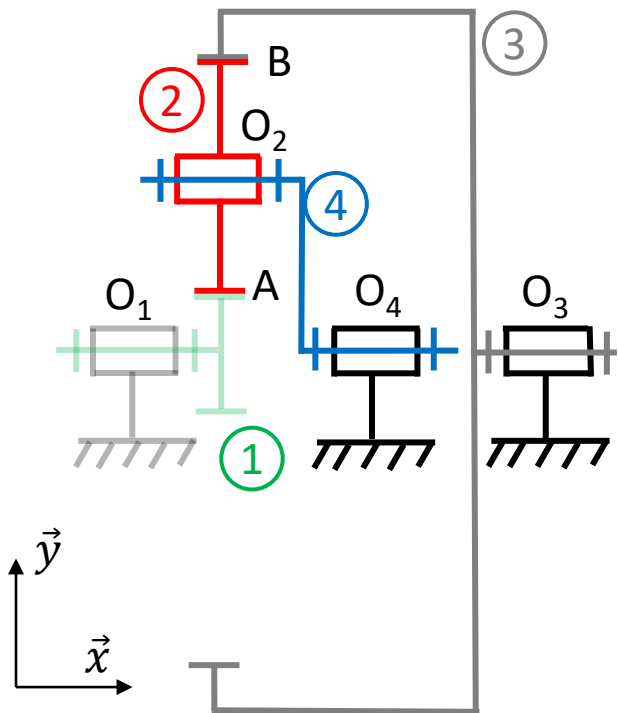
RSG en B entre 2 et 3 :

$$\overrightarrow{V(B \in 2/4)} + \overrightarrow{V(B \in 4/0)} = \overrightarrow{V(B \in 3/0)}$$

$$\overrightarrow{V(B \in 3/0)} = \overrightarrow{V(O_3 \in 3/0)} + \overrightarrow{BO_3} \wedge \overrightarrow{\Omega_{30}}$$

BABAR au point  $O_3$

$$\overrightarrow{V(B \in 3/0)} = \vec{0} + (-R_3 \cdot \vec{y} + d_3 \cdot \vec{x}) \wedge \omega_{30} \vec{x} = R_3 \cdot \omega_{30} \vec{z}$$



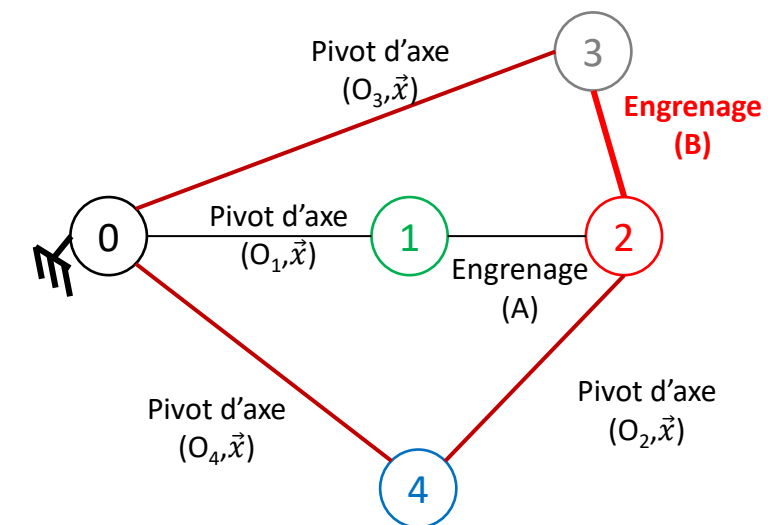
RSG en B entre 2 et 3 :

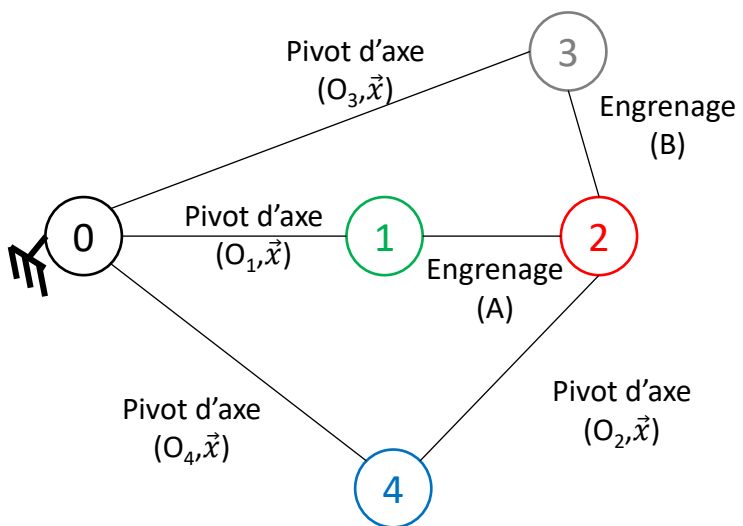
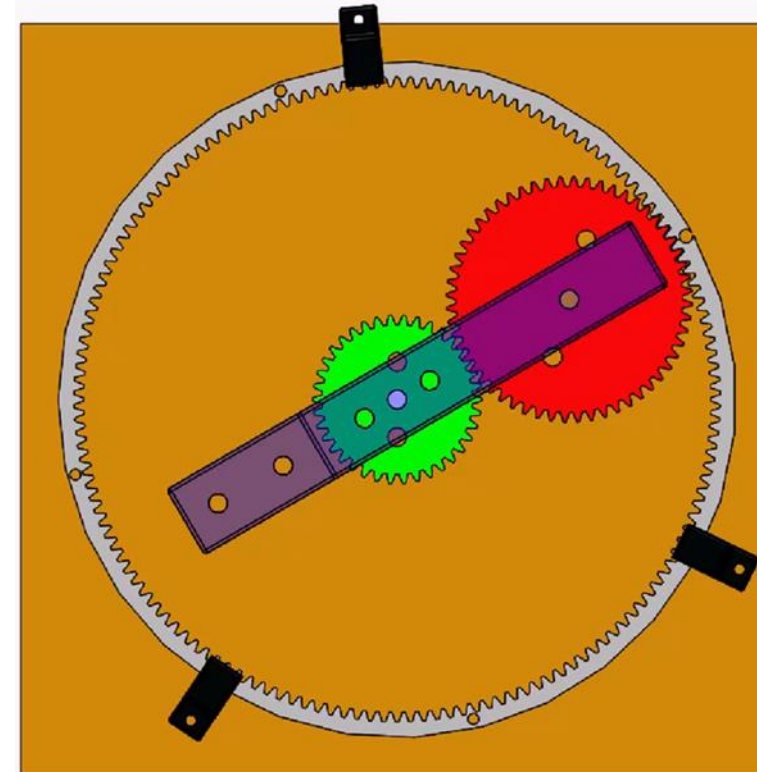
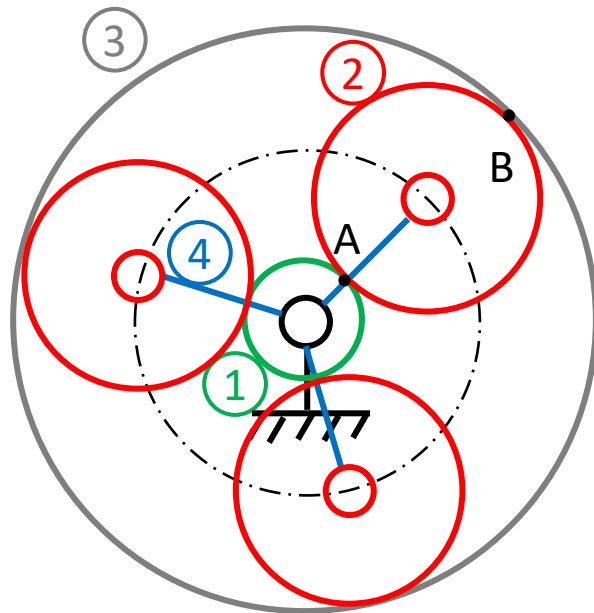
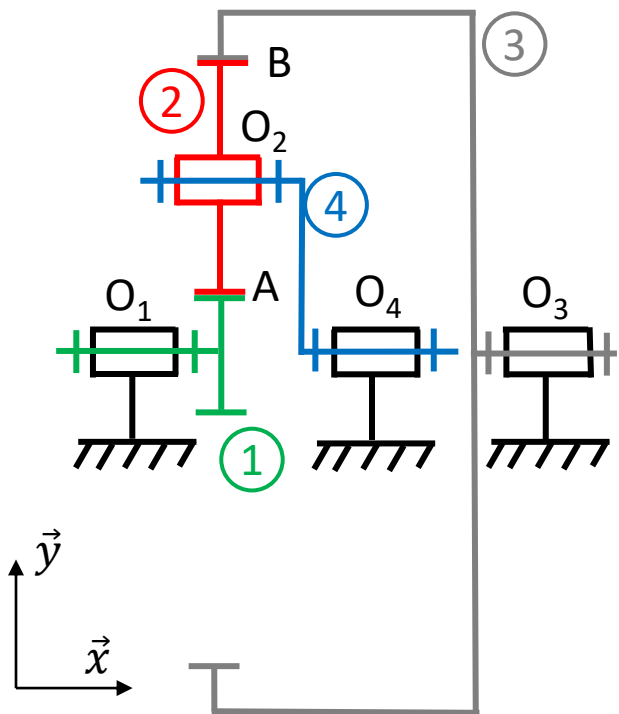
$$\overrightarrow{V(B \in 2/4)} + \overrightarrow{V(B \in 4/0)} = \overrightarrow{V(B \in 3/0)}$$

Donc  $R_2 \cdot \omega_{24} \vec{z} + R_3 \cdot \omega_{40} \vec{z} = R_3 \cdot \omega_{30} \vec{z}$

En projetant sur  $\vec{z}$ , on obtient :

$$R_2 \cdot \omega_{24} + R_3 \cdot \omega_{40} = R_3 \cdot \omega_{30} \quad (2)$$





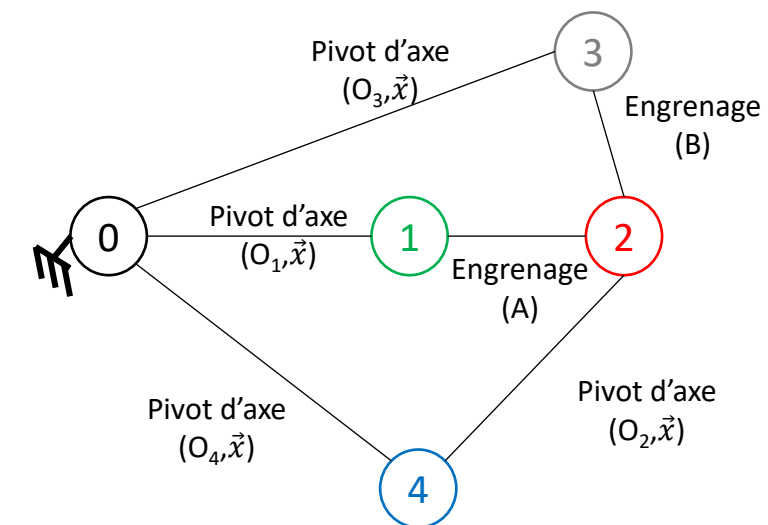
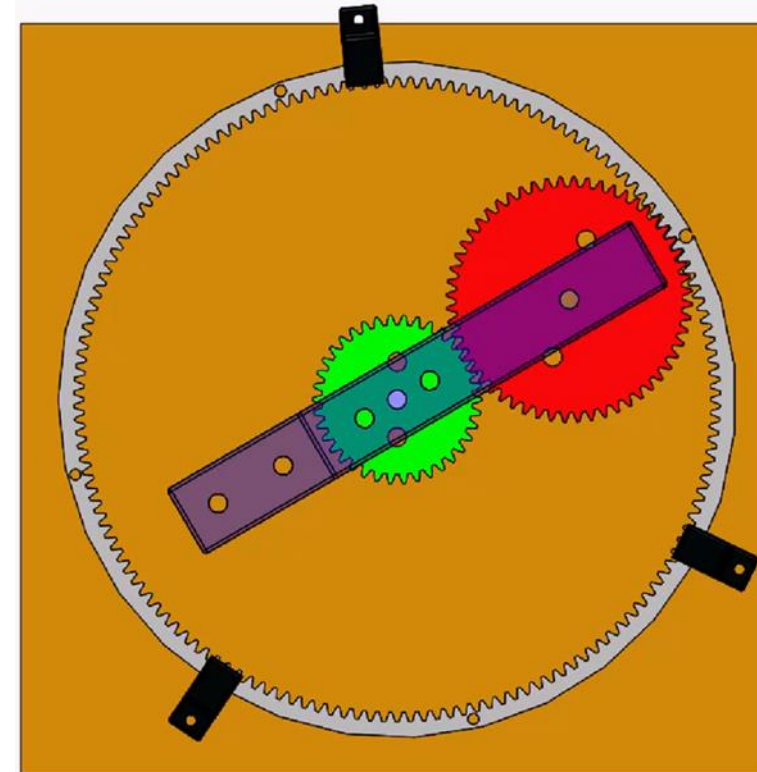
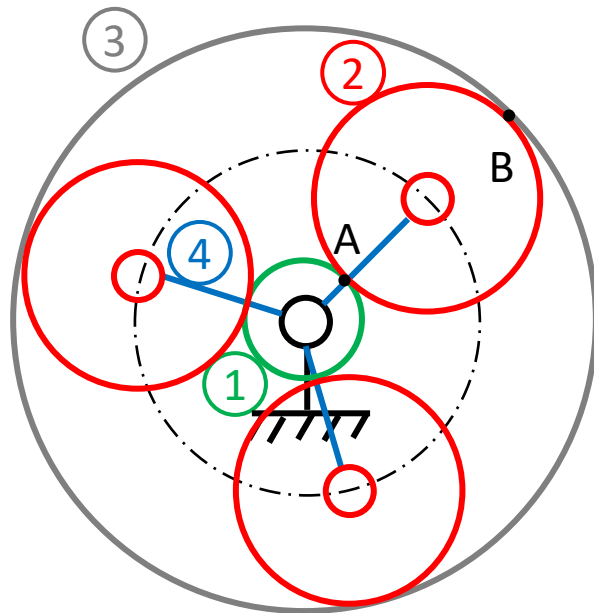
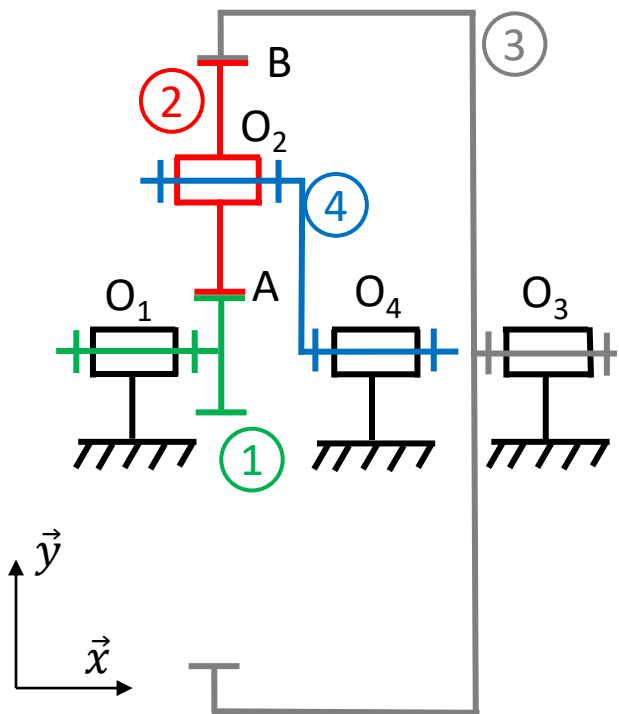
$$-R_2 \cdot \omega_{24} + R_1 \cdot \omega_{40} = R_1 \cdot \omega_{10} \quad (1)$$

$$R_2 \cdot \omega_{24} + R_3 \cdot \omega_{40} = R_3 \cdot \omega_{30} \quad (2)$$

On souhaite une relation entre  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{30}$  et  $\omega_{40}$

On fait donc disparaître le terme  $\omega_{24}$  en ajoutant (1)+(2)

$$R_1 \cdot \omega_{40} + R_3 \cdot \omega_{40} = R_1 \cdot \omega_{10} + R_3 \cdot \omega_{30}$$



$$R_1 \cdot \omega_{40} + R_3 \cdot \omega_{40} = R_1 \cdot \omega_{10} + R_3 \cdot \omega_{30}$$

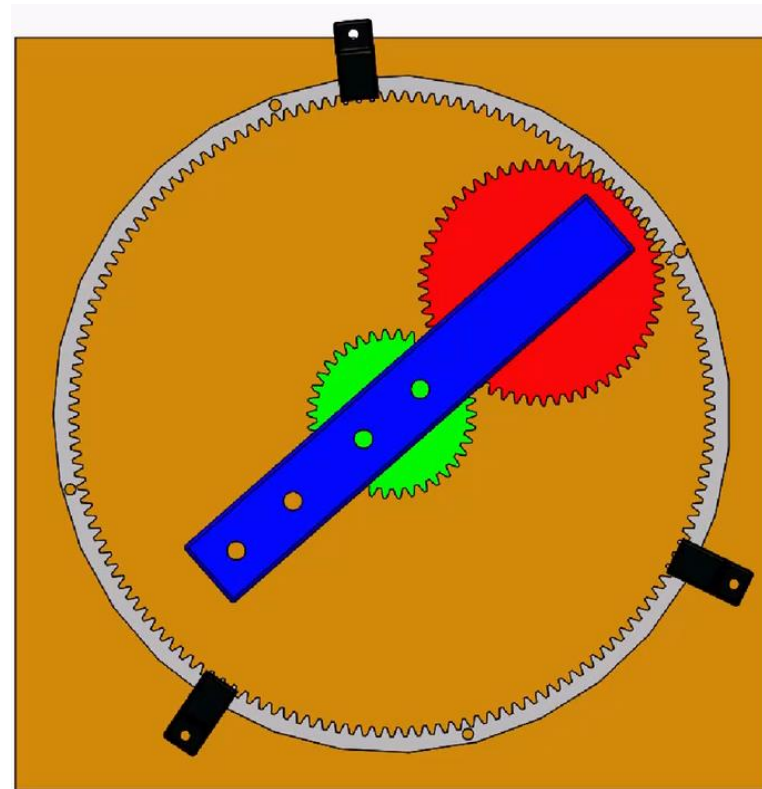
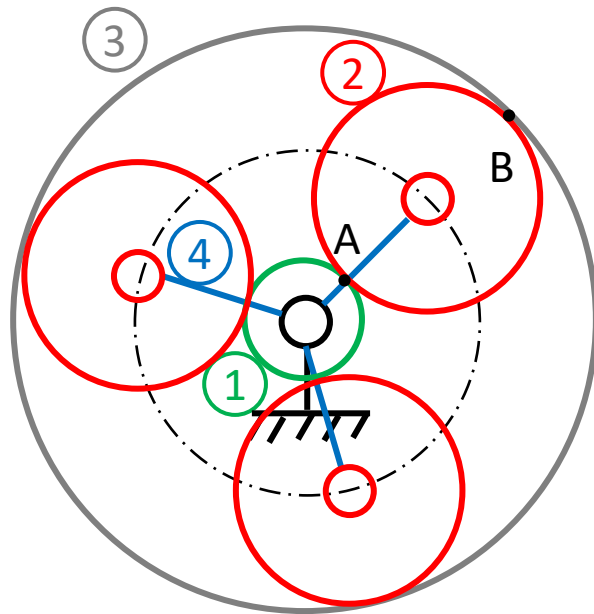
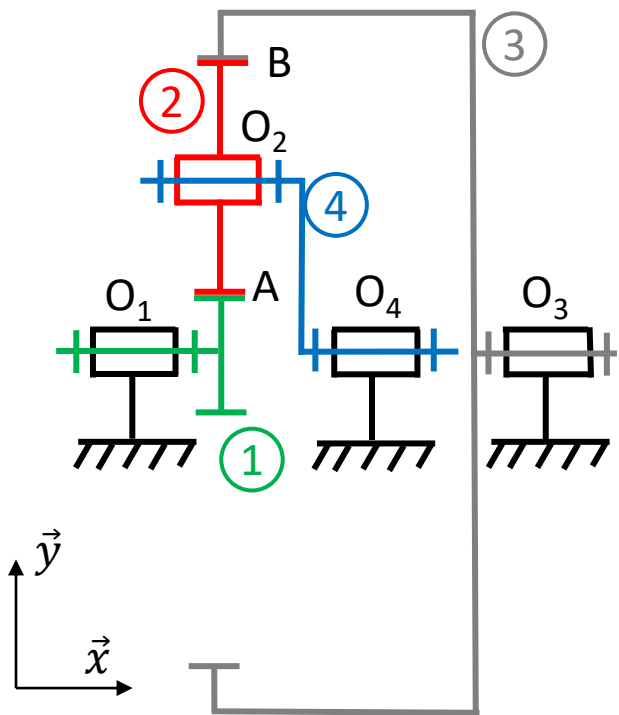
$$-R_3 \cdot \omega_{30} + R_3 \cdot \omega_{40} = R_1 \cdot \omega_{10} - R_1 \cdot \omega_{40}$$

D'où

$$-R_3 \cdot (\omega_{30} - \omega_{40}) = R_1 \cdot (\omega_{10} - \omega_{40})$$

Donc

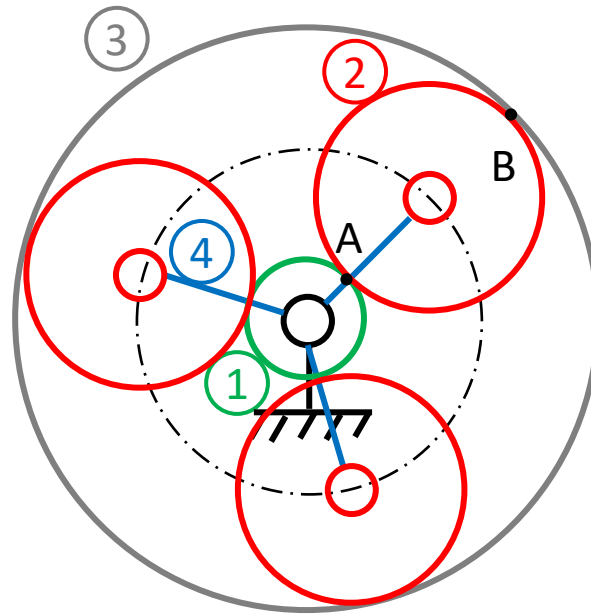
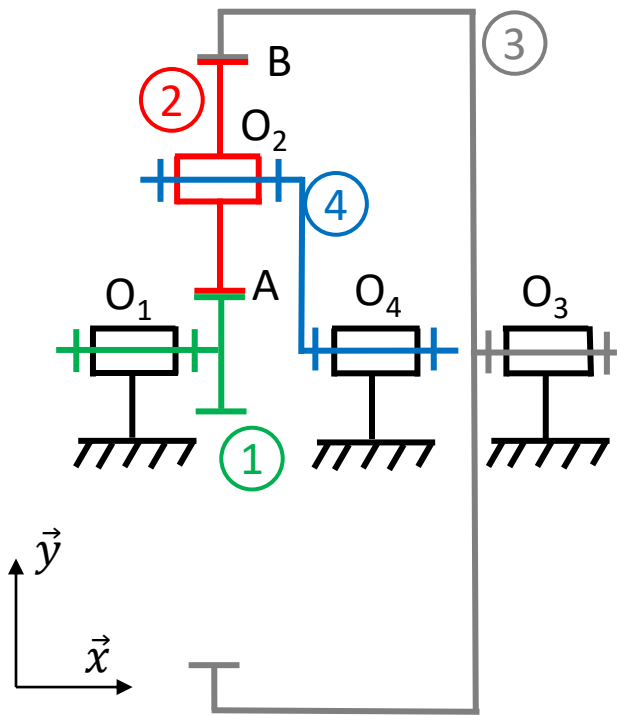
$$\frac{\omega_{10} - \omega_{40}}{\omega_{30} - \omega_{40}} = -\frac{R_3}{R_1} = -\frac{Z_3}{Z_1}$$



### FORMULE DE WILLIS

On se place sur le **PORTE-SATELLITE (4)**

Dans ce cas, les engrenages entre (1) et (2) en A et (2) et (3) en B sont des engrenages classiques



### FORMULE DE WILLIS

On se place sur le **PORTE-SATELLITE (4)**

Dans ce cas, les engrenages entre (1) et (2) en A et (2) et (3) en B sont des engrenages classiques

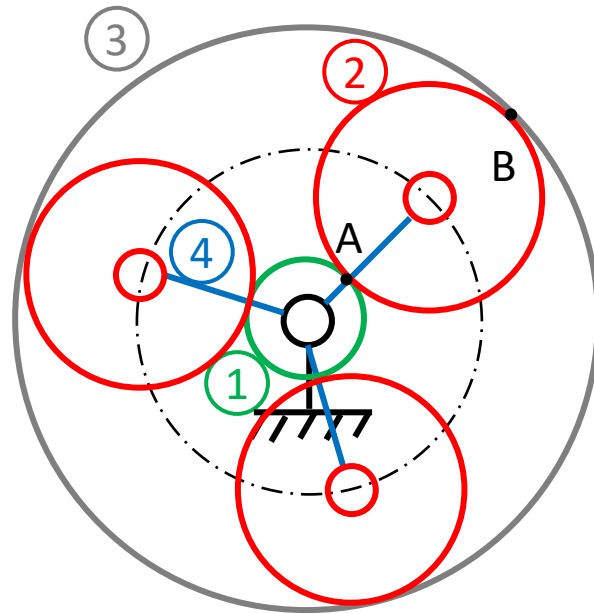
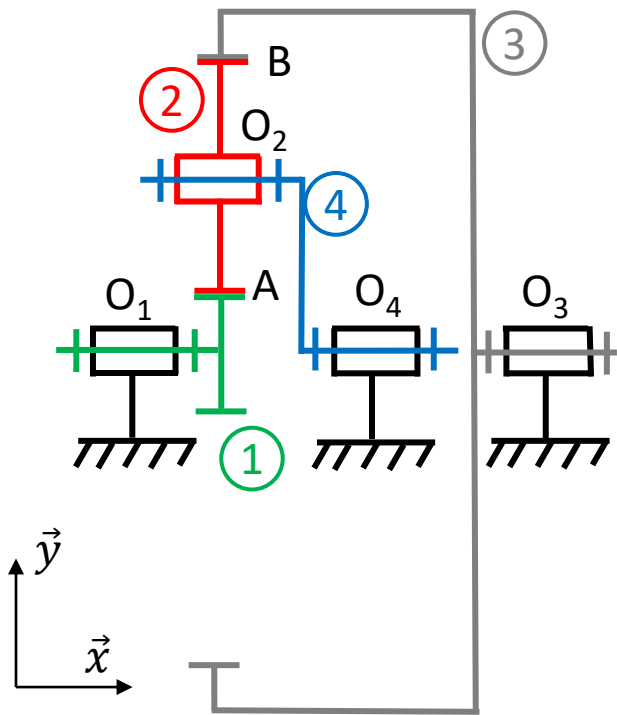
En A :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{R_2}{R_1} \quad (\text{Contact EXTERIEUR})$$

Or, pour obtenir cette relation, on s'est placé sur le **PORTE-SATELLITE (4)**

$$\frac{\omega_{1/4}}{\omega_{2/4}} = -\frac{R_2}{R_1}$$





### FORMULE DE WILLIS

On se place sur le **PORTE-SATELLITE (4)**

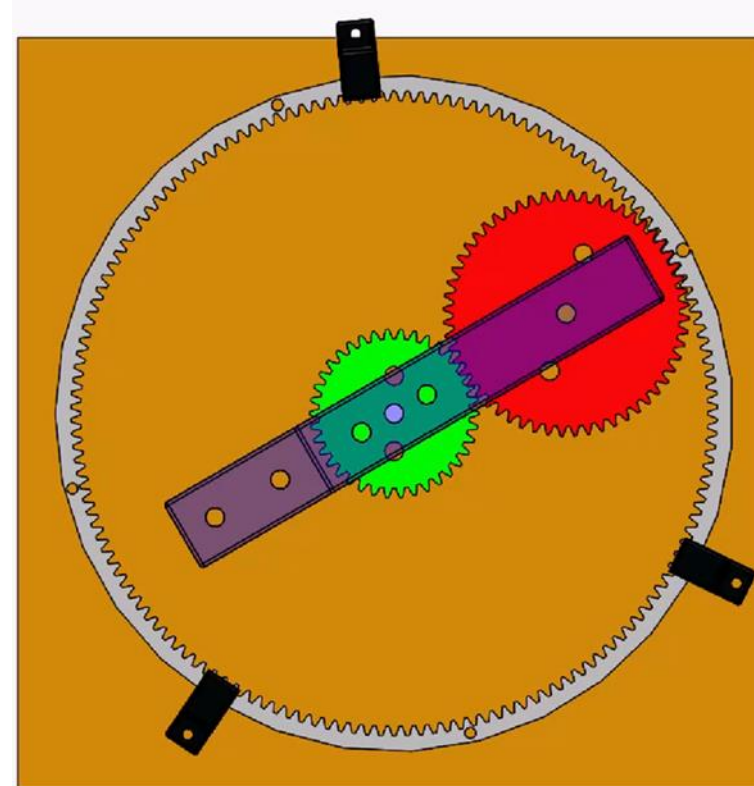
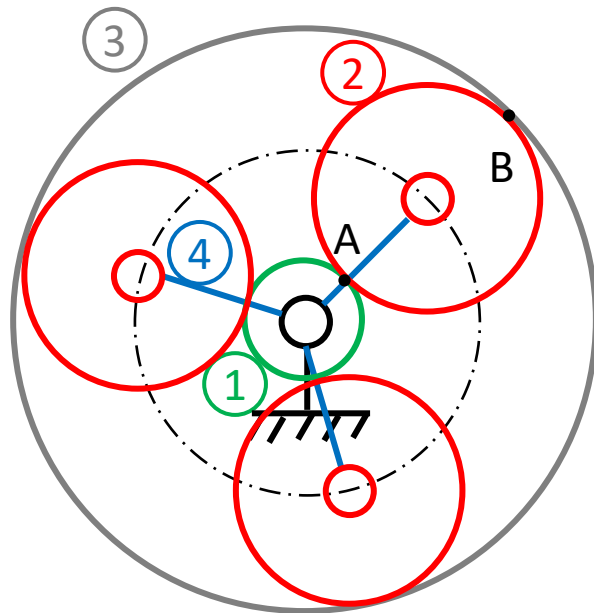
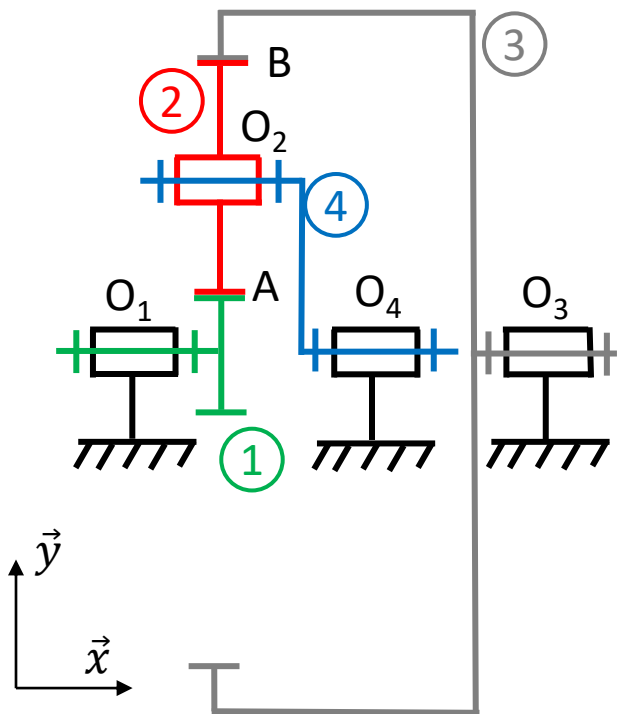
Dans ce cas, les engrenages entre (1) et (2) en A et (2) et (3) en B sont des engrenages classiques

En B :

$$\frac{\omega_2}{\omega_3} = + \frac{R_3}{R_2} \quad (\text{Contact INTERIEUR})$$

Or, pour obtenir cette relation, on s'est placé sur le **PORTE-SATELLITE (4)**

$$\frac{\omega_{2/4}}{\omega_{3/4}} = \frac{R_3}{R_2}$$



### FORMULE DE WILLIS

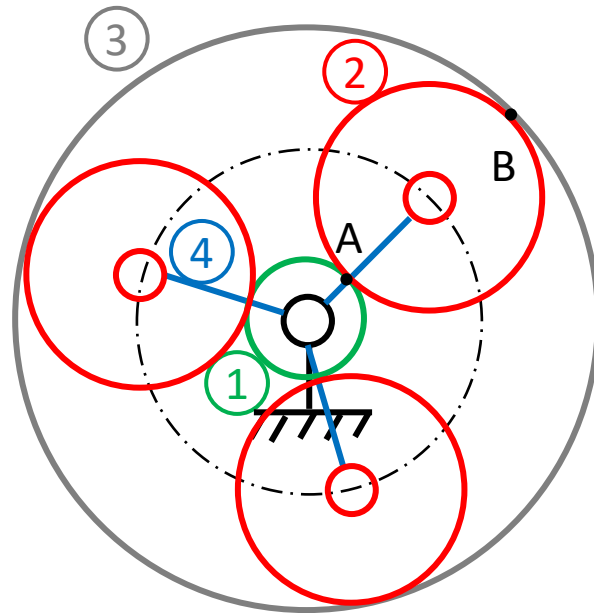
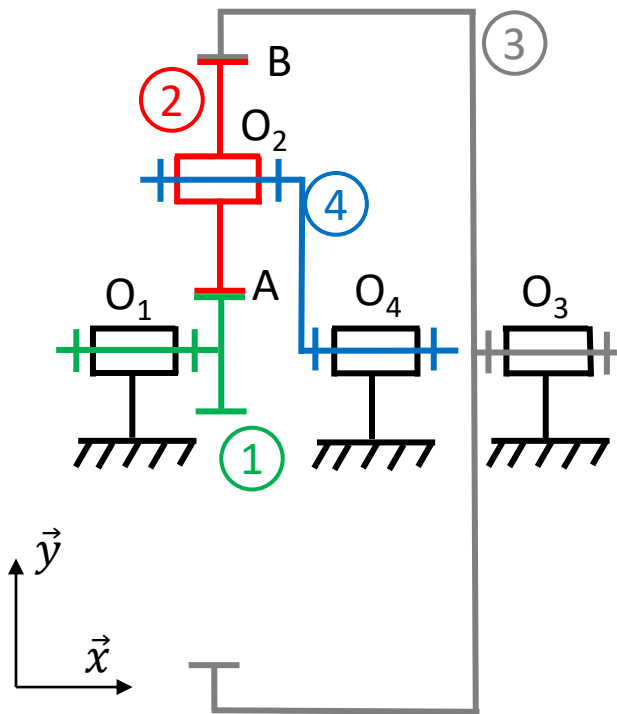
On se place sur le **PORTE-SATELLITE (4)**

Dans ce cas, les engrenages entre (1) et (2) en A et (2) et (3) en B sont des engrenages classiques

On souhaite une relation entre  $\omega_{1/4}$  et  $\omega_{3/4}$

$$\frac{\omega_{1/4}}{\omega_{3/4}} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_3}{R_2} = -\frac{R_3}{R_1}$$





### FORMULE DE WILLIS

On se place sur le **PORTE-SATELLITE (4)**

Dans ce cas, les engrenages entre (1) et (2) en A et (2) et (3) en B sont des engrenages classiques

**Composition de mouvements :**  
 $1/4 = 1/0 + 0/4$  et  $3/4 = 3/0 + 0/4$

$$\omega_{1/4} = \omega_{1/0} + \omega_{0/4} = \omega_{1/0} - \omega_{4/0}$$

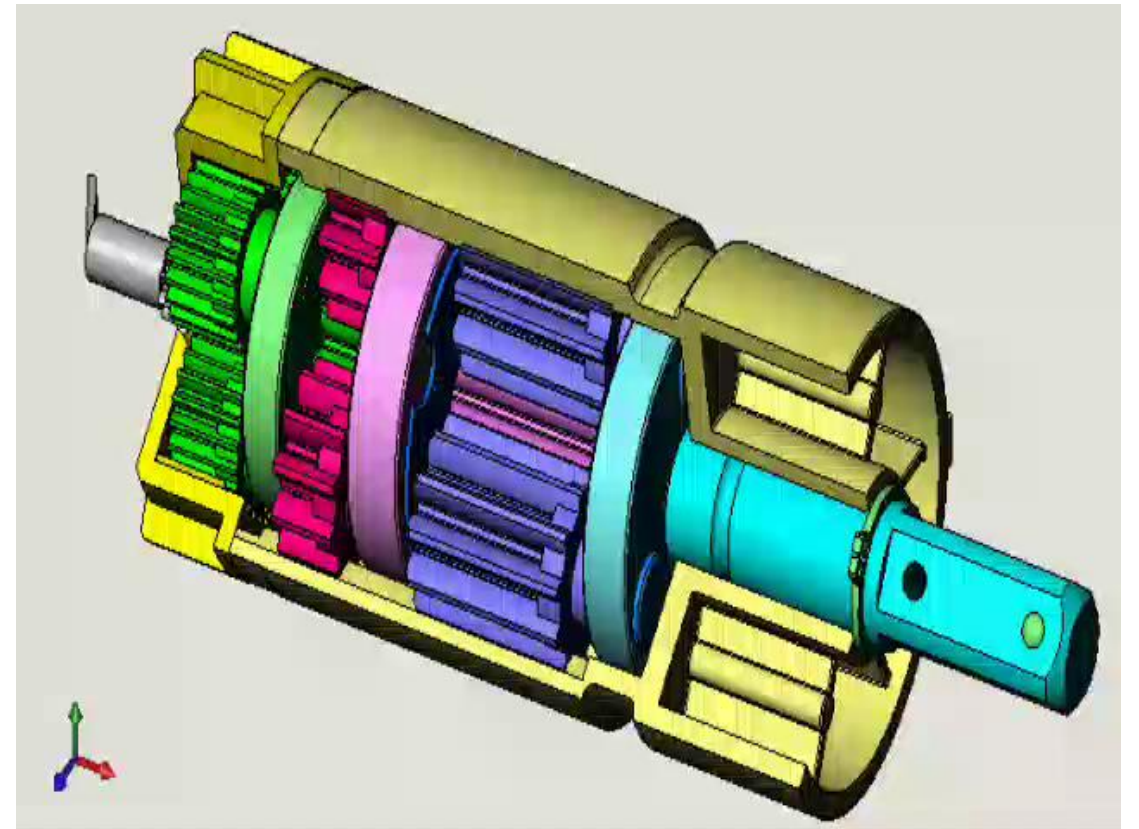
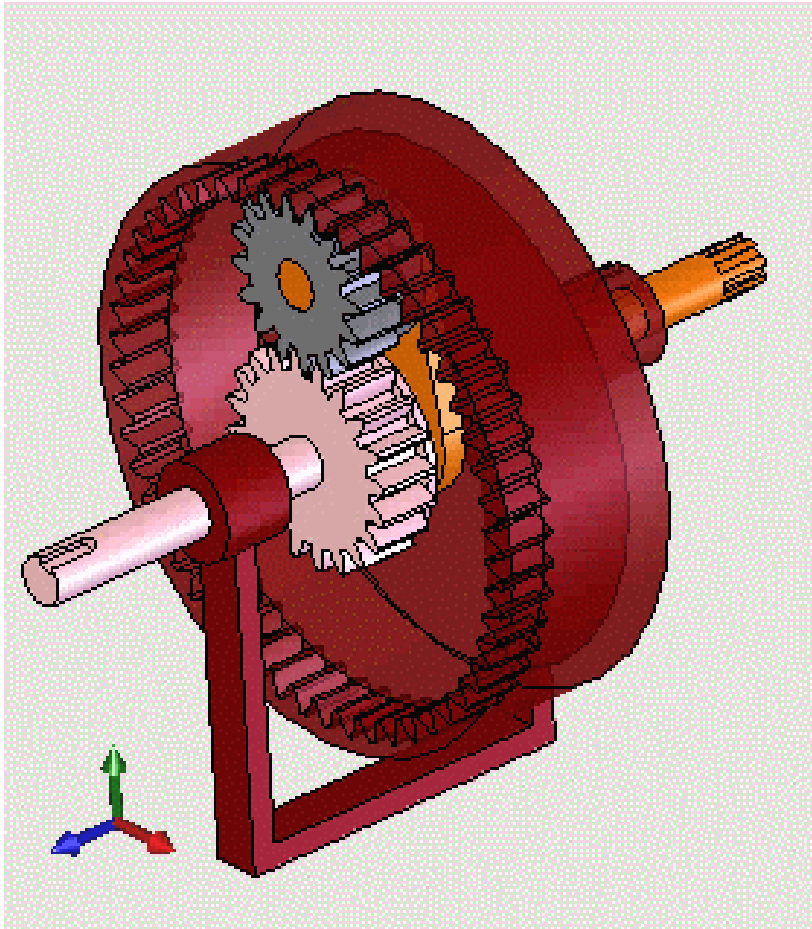
$$\omega_{3/4} = \omega_{3/0} + \omega_{0/4} = \omega_{3/0} - \omega_{4/0}$$

Donc

$$\frac{\omega_{10} - \omega_{40}}{\omega_{30} - \omega_{40}} = -\frac{R_3}{R_1} = -\frac{Z_3}{Z_1}$$

# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

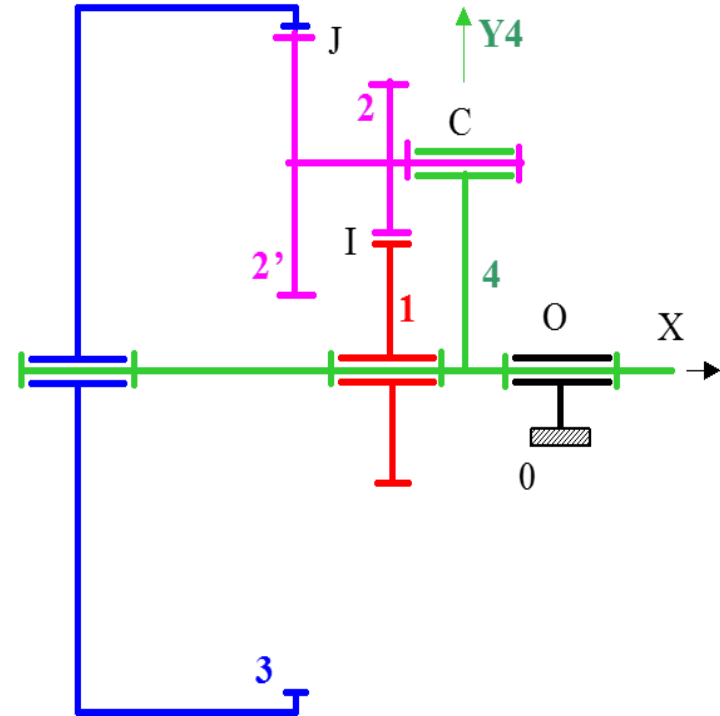
## Trains épicycloïdaux



# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

## Trains épicycloïdaux

- Référentiel de base le porte-satellite 4.
- Train épicycloïdal ≈ 2 deux trains simples.



$$\left( \begin{array}{l} \frac{\omega_{24}}{\omega_{14}} = -\frac{R_1}{R_2} \\ \frac{\omega_{34}}{\omega_{2/4}} = \frac{R'_2}{R_3} \end{array} \right) \rightarrow \frac{\omega_{34}}{\omega_{14}} = -\frac{R_1 \cdot R'_2}{R_2 \cdot R_3} = -\frac{Z_1 \cdot Z'_2}{Z_2 \cdot Z_3}$$

# Contact ponctuel / RSG : ENGRENAGES

Trains épicycloïdaux

Composition de mouvements :  $3/4 = 3/0 + 0/4$  et  $1/4 = 1/0 + 0/4$  :

$$\frac{\omega_{30} - \omega_{40}}{\omega_{10} - \omega_{40}} = - \frac{Z_1 \cdot Z'_2}{Z_2 \cdot Z_3}$$

